

Serie 6

ENDLICH ERZEUGTE ABELSCHER GRUPPEN

36. (a) Zeige, dass $\langle (1, 1) \rangle \leq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nicht Produktform hat. Das heisst, es existieren keine Untergruppen $H_1, H_2 \leq \mathbb{Z}$ mit $\langle (1, 1) \rangle = H_1 \times H_2$.
- (b) Zeige, dass jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ trivial oder unendlich zyklisch ist. Insbesondere ist \mathbb{Q} nicht endlich erzeugt.
- (c) Sei $G = (\mathbb{Q}^*, \cdot)$. Zeige, dass der Index $[G : G^2]$ unendlich ist.

37. Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen.

- (a) Beweise folgende Variante von Korollar 5.5 bzw des Hauptsatzes über endlich erzeugte abelsche Gruppen:

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann existieren natürliche Zahlen n, k und paarweise verschiedene Primzahlen p_1, \dots, p_n , sodass für jedes $1 \leq i \leq n$ eine positive natürliche Zahl j_i und positive natürliche Zahlen $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ij_i}$ existieren, sodass gilt

$$G \cong \left(\prod_{i=1}^n \prod_{\ell=1}^{j_i} C_{p_i^{\alpha_{i\ell}}} \right) \times \mathbb{Z}^k.$$

Bemerkung: Der Hauptsatz bzw. Korollar 5.5 darf im Beweis verwendet werden.

- (b) Zeige: Diese Zerlegung ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.
- (c) Zeige: Die Zerlegung in Korollar 5.5 ist bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutig.
- (d) Bestimme, bis auf Isomorphie, alle abelschen Gruppen der Ordnung 72.