Serie 8

PERMUTATIONSGRUPPEN, SEMI-DIREKTE PRODUKTE

---

44. Zeige, dass für die Tetraedergruppe T, für die Würfelgruppe C, und für die Dodekaedergruppe D gilt:

$$T \cong A_4 \qquad C \cong S_4 \qquad D \cong A_5$$

45. (a) Zeige: Für $n \geqslant 5$ ist A_n der einzige nicht-triviale Normalteiler von S_n.

(b) Zeige, dass für $n \geqslant 5$ die Gruppe S_n nicht auflösbar ist.

46. Sei $p > 2$ eine Primzahl und sei G eine Gruppe der Ordnung $|G| = 2p$.

Zeige, dass G entweder zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe D_p ist.

47. Seien zwei Gruppen N, H und zwei Homomorphismen $\varphi, \varphi' \colon H \to \operatorname{Aut}(N)$ gegeben. Es seien $N \rtimes_\varphi H$ und $N \rtimes_{\varphi'} H$ die semidirekten Produkte.

Zeige, dass diese beiden Gruppen in den folgenden Situationen isomorph sind:

(a) Sei $\alpha \in \operatorname{Aut}(N)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi'_h = \alpha \circ \varphi_h \circ \alpha^{-1}$. Dann gilt

$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

(b) Sei $\beta \in \operatorname{Aut}(H)$ ein Automorphismus so, dass $\varphi = \varphi' \circ \beta$. Dann gilt

$$N \rtimes_\varphi H \cong N \rtimes_{\varphi'} H.$$

48. Bestimme bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 28.

Hinweis: Zeige mit dem Sylow-Theorem, dass eine Gruppe der Ordnung 28 immer einen nicht-trivialen Normalteiler hat.