

## Bonusaufgabe 10

### Aufgabe 10.1

Betrachten Sie die Matrizen  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  und  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume der beiden Matrizen  $A_1$  und  $A_2$ . Zeichnen Sie die Eigenräume von  $A_1$  und  $A_2$  in ein 2-dimensionales Koordinatensystem ein.

Die Matrix  $A_1$  kann wie folgt diagonalisiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:T_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=:T_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=:D_1}.$$

- (b) Vergleichen Sie die Transformationsmatrix  $T_1$  und die Diagonalmatrix  $D_1$  mit Ihren Berechnungen in Teilaufgabe (a). Was fällt Ihnen auf?
- (c) Ist es auch möglich, die Matrix  $A_1$  mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe (a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

Die Matrix  $A_2$  kann wie folgt diagonalisiert werden:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:T_2^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:T_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:D_2}.$$

- (d) Vergleichen Sie die Transformationsmatrix  $T_2$  und die Diagonalmatrix  $D_2$  mit Ihren Berechnungen in Teilaufgabe (a). Was fällt Ihnen auf?
- (e) Ist es auch möglich, die Matrix  $A_2$  mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe Ihrer Skizze aus Teilaufgabe (a). Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

### Aufgabe 10.2

Betrachten Sie die Matrizen  $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume der Matrizen  $B_1$  und  $B_2$ .
- (b) Diagonalisieren Sie die Matrix  $B_1$  mithilfe Ihrer Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (b) und (d) aus der vorhergehenden Aufgabe. Denn: Die Diagonalisierung von  $2 \times 2$ -Matrizen und  $3 \times 3$ -Matrizen verläuft analog.
- (c) Ist es auch möglich, die Matrix  $B_1$  mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

- (d) Diagonalisieren Sie die Matrix  $B_2$  mithilfe Ihrer Erkenntnisse aus den Teilaufgaben (b) und (d) aus der vorhergehenden Aufgabe.
- (e) Ist es auch möglich, die Matrix  $B_2$  mit einer orthogonalen Transformationsmatrix zu diagonalisieren? Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es möglich ist, berechnen Sie die orthogonale Transformationsmatrix.

### **Aufgabe 10.3**

Vergleichen und kontrastieren Sie die Matrizen  $A_1$  und  $B_1$ . Welche Eigenschaft haben diese beiden Matrizen gemeinsam?