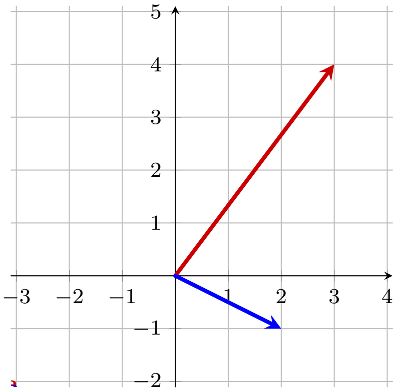
D-MAVT — Lineare Algebra II — FS 2024

Prof. Dr. N. Hungerbühler

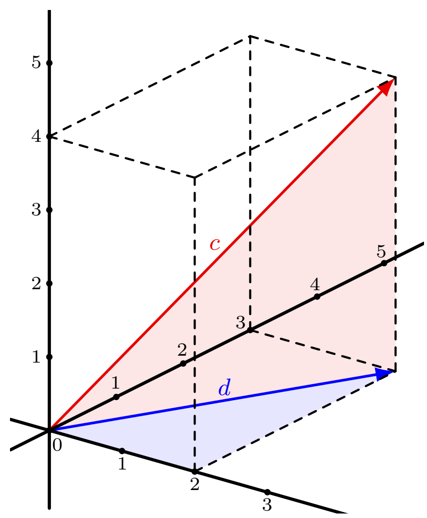
Bonusaufgabe 7

Aufgabe 7.1

(a) Betrachten Sie die zwei Vektoren $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$, die im untenstehenden Koordinatensystem dargestellt sind. Berechnen Sie die Länge der Vektoren a und b mithilfe des Satzes des Pythagoras.



(b) Betrachten Sie nun die analoge Berechnung der Länge des Vektors $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.



Mithilfe des Satzes des Pythagoras im blauen rechtwinkligen Dreieck können wir die Länge des Hilfsvektors d berechnen. Wir erhalten

$$\text{Länge}(d)^2 = 2^2 + 3^2.$$

Nun berechnen wir die Länge von c unter Verwendung des roten rechtwinkligen Dreiecks mit dem Satz des Pythagoras. Es folgt

$$\text{Länge}(c) = \sqrt{\text{Länge}(d)^2 + 4^2}.$$

Wir erhalten also

$$\text{Länge}(c) = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}.$$

Betrachten Sie nun das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \cdot\, , \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Berechnen Sie für den gegebenen Vektor c den Ausdruck $\langle c, c \rangle$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 7.2

Betrachten Sie nun den Vektorraum $\mathbb{R}^5$. Da der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ähnlich aufgebaut ist wie der Vektorraum $\mathbb{R}^5$, können wir im Vektorraum $\mathbb{R}^5$ ein Skalarprodukt definieren, welches analog ist zum Skalarprodukt im Vektorraum $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,,\cdot \rangle : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \right) &\longmapsto \sum_{i=1}^{5} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5. \end{aligned}$$

Auch im $\mathbb{R}^5$ ist die Länge eines Vektors $v \in \mathbb{R}^5$ durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Betrachten Sie die Vektoren $c = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$

(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors c. Betrachten Sie zusätzlich die Vektoren $f = 4c$ und $g = -5c$. Basierend auf der Länge des Vektors c, was würden Sie für die Längen der Vektoren f und g erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe (a), indem Sie die Längen der Vektoren f und g berechnen.

(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren d und e.

(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathbb{R}^5$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathbb{R}^5$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.3

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathcal{P}_2$ der reellen Polynome vom Grad ≤ 2. Da der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ähnlich aufgebaut ist wie der Vektorraum $\mathcal{P}_2$, können wir auch im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ die Länge eines Vektors definieren.

Die Länge eines Vektors p im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{P}_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \|p\| := \sqrt{\int_0^1 p\,(x)\, p\,(x)\, dx} \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Polynome $u\,(x) = -3x^2 + 2x - 4,\ v\,(x) = 2x^2 + 6, w\,(x) = -x^2 + 3x - 8.$

(a) Berechnen Sie die Länge des Vektors u. Betrachten Sie zusätzlich die Vektoren $s = 3u$ und $t = -4u$. Basierend auf der Länge des Vektors u, was würden Sie für die Längen der Vektoren s und t erwarten? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Verifizieren Sie Ihre Vermutungen aus Teilaufgabe (a), indem Sie die Längen der Vektoren s und t berechnen.

(c) Berechnen Sie die Längen der Vektoren v und w.

(d) Existiert ein Vektor mit Länge 0 im Vektorraum $\mathcal{P}_2$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Existiert ein Vektor mit negativer Länge im Vektorraum $\mathcal{P}_2$? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für einen solchen Vektor. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.4

In der folgenden Tabelle sind die Vektorräume aufgeführt, welche in den vorhergehenden Aufgaben diskutiert worden sind. Da die drei Vektorräume ähnlich aufgebaut sind, würden wir auch die Existenz eines Skalarproduktes im Vektorraum $\mathcal{P}_2$ erwarten. Vergleichen und kontrastieren Sie die Einträge in der Tabelle miteinander – welchen Ausdruck vermuten Sie für den leeren Tabelleneintrag? Begründen Sie Ihre Antwort.

Vektorraum V	**Länge eines Vektors** $v \in V$	**Skalarprodukt zweier Vektoren** $a, b \in V$
$\mathbb{R}^3$	$\\|v\\| = \sqrt{v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3}$	$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
$\mathbb{R}^5$	$\\|v\\| = \sqrt{v_1v_1 + v_2v_2 + v_3v_3 + v_4v_4 + v_5v_5}$	$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5$
$\mathcal{P}_2$	$\\|v\\| = \sqrt{\int_0^1 v(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$	