

Lineare Algebra II

Bonusaufgabe 6

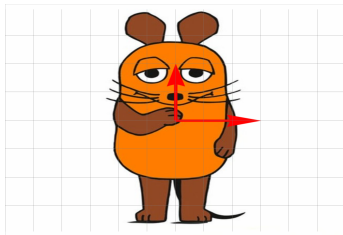
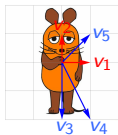
Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

6.1 Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung $F_a : x \mapsto Ax$. Die folgende Darstellung veranschaulicht eine mögliche Anwendung von F_a :



Betrachten Sie die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 und v_5 . Berechnen Sie für alle $i = 1, \dots, 5$ die Bilder Av_i der Vektoren v_i und zeichnen Sie diese in der Skizze oben ein. Kontrastieren Sie dann die Vektoren v_i mit ihren Bildern Av_i geometrisch und algebraisch. Tragen Sie Ihre Beobachtungen in die Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten.

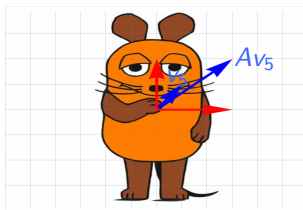
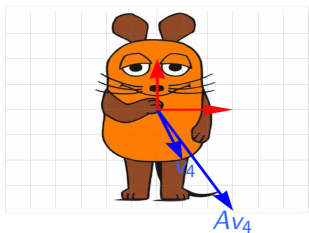
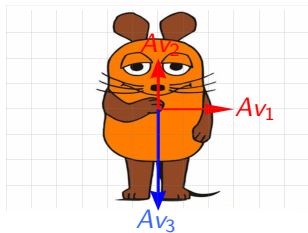
Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

	Av_i	geom. Vergleich v_i vs. Av_i	algeb. Vergleich v_i vs. Av_i
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$Av_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	$v_1 \parallel Av_1$	$Av_1 = 3v_1$
$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$	$v_2 \parallel Av_2$	$Av_2 = 2v_2$
$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$	$v_3 \parallel Av_3$	$Av_3 = 2v_3$
$v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	$Av_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$	$v_4 \not\parallel Av_4$	$Av_4 \neq \lambda v_4$
$v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $= v_1 + v_2$	$Av_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$v_5 \not\parallel Av_5$	$Av_5 \neq \lambda v_5$

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2



Überlegen Sie sich, ob Ähnlichkeiten zwischen einigen dieser Vektoren in Bezug auf die von Ihnen entdeckten Eigenschaften bestehen.

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

- ▶ Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 werden von der Abbildung F_a nur mit einem Faktor gestreckt, Vektor und Bildvektor sind jeweils parallel.
- ▶ Die Streckungsfaktoren stehen gerade auf der Diagonalen der Diagonalmatrix A :
 a_{11} ist der Streckungsfaktor in Richtung der x_1 -Achse,
 a_{22} ist der Streckungsfaktor in Richtung der x_2 -Achse.
- ▶ Die Vektoren Av_4 und Av_5 haben jedoch eine andere Richtung als die Vektoren v_4 und v_5 .

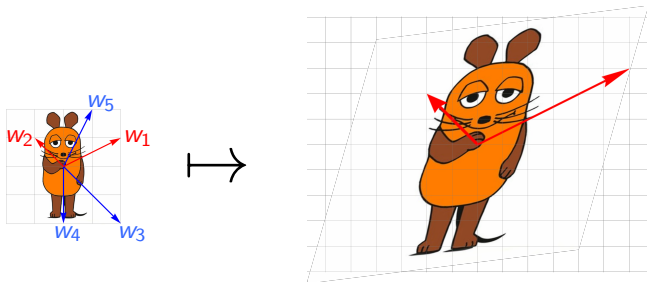
6.2 Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 8/3 & 2/3 \\ 1/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

sowie die Abbildung $F_b : x \mapsto Bx$. Die folgende Darstellung veranschaulicht eine mögliche Anwendung von F_b :

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

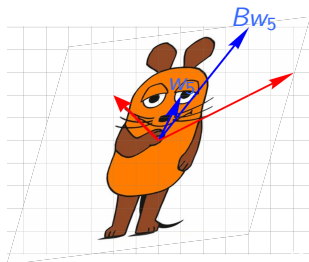
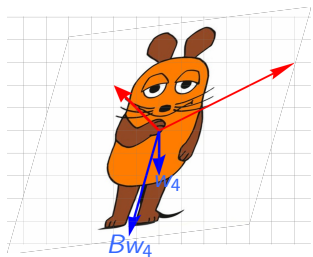
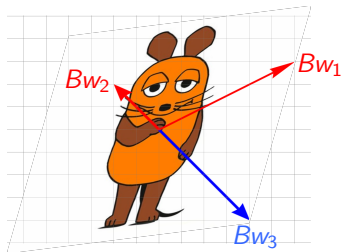


Betrachten Sie die Vektoren w_1, w_2, w_3, w_4 und w_5 . Berechnen Sie für alle $i = 1, \dots, 5$ die Bilder Bw_i der Vektoren w_i und zeichnen Sie diese in der Skizze oben ein. Kontrastieren Sie dann die Vektoren w_i mit ihren Bildern Bw_i geometrisch und algebraisch. Tragen Sie Ihre Beobachtungen in die Tabelle ein und begründen Sie Ihre Antworten.

	Bv_i	geom. Vergleich v_i vs. Bv_i	algeb. Vergleich v_i vs. Bv_i
$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$Bw_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$	$w_1 \parallel Bw_1$	$Bw_1 = 3w_1$
$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$Bw_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$w_2 \parallel Bw_2$	$Bw_2 = 2w_2$
$w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	$Bw_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$	$w_3 \parallel Bw_3$	$Bw_3 = 2w_3$
$w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$	$Bw_4 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{14}{3} \end{pmatrix}$	$w_4 \not\parallel Bw_4$	$Bw_4 \neq \lambda w_4$
$w_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= w_1 + w_2$	$Bw_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	$w_5 \not\parallel Bw_5$	$Bw_5 \neq \lambda w_5$

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2



Überlegen Sie sich, ob Ähnlichkeiten zwischen einigen dieser Vektoren in Bezug auf die von Ihnen entdeckten Eigenschaften bestehen.

Aufgabe 6.1

Aufgabe 6.2

- ▶ Die Vektoren w_1, w_2 und w_3 werden von der Abbildung F_b nur mit einem Faktor gestreckt, Vektor und Bildvektor sind jeweils parallel.
- ▶ Der Streckungsfaktor in Richtung w_1 ist 3.
Der Streckungsfaktor in Richtung w_2 ist 2.
- ▶ Die Vektoren Bw_4 und Bw_5 haben jedoch eine andere Richtung als die Vektoren w_4 und w_5 .
- ▶ Weder die ausgezeichneten Richtungen w_1, w_2 noch die Streckungsfaktoren kann man in diesem Fall direkt in der Matrix B ablesen. **Wie also findet man diese besonderen Vektoren und Faktoren?!**