Lineare Algebra II

Bonusaufgabe 9

9.1 Betrachten Sie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Nehmen Sie an, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existiert, der das HLGS

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

löst. Kann man daraus folgern, dass λx ebenfalls eine Lösung des HLGS ist?

Antwort. Mais bien sûr : $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir erinnern uns: Die Lösungen eines HLGS bilden einen VR.

9.1b) Nehmen Sie an, dass $w, u \in \mathbb{R}^3$ Lösungen des HLGS

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind. Kann man daraus folgern, dass $w + u$ ebenfalls eine Lösung des HLGS ist?

Antwort. Ma sicuramente!
$A(w+u) = Aw + Au = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir erinnern uns: Die Lösungen eines HLGS bilden einen VR.

9.1c) Welche Eigenschaften hat die Lösungsmenge des HLGS $Ax = 0$

$$K_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Antwort. K_1 ist ein eindimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$, denn das HLGS hat einen freien Parameter. K_1 ist der Kern der Matrix A.

9.1c.i) Liegt der Vektor $s := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in K_1?

Antwort. Nein: $As = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9.1c.ii) Liegt der Vektor $t := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ in K_1?

Antwort. Ja: $At = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9.1c.iii) Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in K_1 liegt?

Antwort. Ja, z. B. der Nullvektor, oder $\sqrt{19\pi}\, t \in K_1$ ☺.

Beachte: $\mathrm{Rang}(A) = 2 \implies 1$ freier Parameter $\implies \dim(K_1) = 1 \implies K_1 = \mathrm{span}\{t\}$.

9.1d) Betrachten Sie die Abbildung

$$F: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto Ax$$

Betrachten Sie zusätzlich die Menge

$$K_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Vergleichen Sie K_1 und K_2. Was beobachten Sie?

Antwort. K_2 ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$, die von F auf den Nullvektor in $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden.

$F(x) = Ax$, also $K_1 = K_2$!!

9.2 Betrachten Sie wieder die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

9.2a) Nehmen Sie an, dass der Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ das LGS $Ax = w$ löst. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ existiert, der das LGS $Ax = \lambda w$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ löst?

Antwort. Jaklar: $u = \lambda v$, denn $A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda w$.

9.2b) Nehmen Sie an, dass $v_1 \in \mathbb{R}^3$ das LGS $Ax = w_1$ löst und dass $v_2 \in \mathbb{R}^3$ das LGS $Ax = w_2$ löst. Kann man daraus folgern, dass ein Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ existiert, welcher das LGS $Ax = w_1 + w_2$ löst?

Antwort. Ja: $x = v_1 + v_2$, denn $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = w_1 + w_2$.

Wir erinnern uns: Ax ist die Linearkombination der Spalten $a^{(i)}$ von A mit den Komponenten von x als Koeffizienten

$$Ax = x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + x_3 a^{(3)}$$

D. h. die Menge

$$\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^3\} = \operatorname{span}\{a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}\}$$

ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$. Da A den Rang 2 hat, ist dieser Unterraum zweidimensional, also ganz $\mathbb{R}^2$.

9.2c) Welche Eigenschaften hat die Menge

$$I_1 := \{ w \in \mathbb{R}^2 \mid \text{es existiert ein } v \in \mathbb{R}^3 : \; Av = w \}?$$

Antwort. I_1 ist die Menge der Vektoren $w \in \mathbb{R}^2$, für die das LGS $Ax = w$ eine Lösung hat. Anders gesagt: I_1 ist die Menge der Vektoren, die bei der Multiplikation von A mit Vektoren $v \in \mathbb{R}^3$ als Resultat herauskommen können, also, wie gesehen, genau der VR, der von den Spalten von A aufgespannt wird. In diesem Beispiel also $I_1 = \mathbb{R}^2$.

9.2c.i) Liegt der Vektor $s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in I_1?

Antwort. Jaklar: s ist die erste Spalte von A, also $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s$.

9.2c.ii) Liegt der Vektor $t := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ in I_1?

Antwort. Ja: schliesslich liegt jeder Vektor von $\mathbb{R}^2$ in I_1. Es gilt z. B. $A \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = t$ (Gauss).

9.2c.iii) Können Sie einen anderen Vektor finden, welcher in I_1 liegt?

Antwort. Ja, z. B. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (Summe der Spalten 1 und 2 von A).

Allgemein, wie gesehen: $I_1 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\} = \mathbb{R}^2$

(Spaltenstruktursatz!).

9.2d) Die Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ und $v_3 := \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$.
(i) Bilden die Vektoren $Av_1,\ Av_2$ und Av_3 auch eine Basis des $\mathbb{R}^2$?
(ii) Bilden die Vektoren $Av_1,\ Av_2$ und Av_3 eine Basis von I_1?

Antwort. Beides nein: Drei Vektoren in $\mathbb{R}^2 = I_1$ sind linear abhängig.
Aber Av_1, Av_2, Av_3 spannen $I_1 = \mathbb{R}^2$ auf, denn aus
$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ folgt $Av = \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Av_3$.

9.2e) Betrachten Sie wieder die Abbildung

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

und die Menge

$$I_2 := \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \text{ es existiert ein } x \in \mathbb{R}^3 : \quad F(x) = w\}.$$

Vergleichen Sie die Mengen I_1 und I_2.

Antwort. I_2 ist die Menge der Bilder der Abbildung F.
Da $F(x) = Ax$ ist $I_1 = I_2$.

9.3 Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Mengen

$$K := \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$I := \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{es existiert ein } v \in \mathbb{R}^2 : \; Bv = w \right\}.$$

9.3a) Liegt der Vektor

$$s := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in K?

Antwort. Nein, $Bs = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9.3b) Liegt der Vektor

$$s := \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in I?

Antwort. Ja, das ist ja grad die erste Spalte von B, also

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s.$$

9.3c) Die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Bilden die Vektoren Bv_1 und Bv_2 eine Basis von I?

Antwort. Ja, denn aus $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ folgt $Bv = \lambda_1 Bv_1 + \lambda_2 Bv_2$, d. h. Bv_1 und Bv_2 erzeugen I, und sie sind linear unabhängig denn aus $0 = \lambda_1 Bv_1 + \lambda_2 Bv_2 = Bv$ folgt $v = 0$ und somit $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

9.4a) Betrachten Sie eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Ist es möglich, dass die Menge

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; Gv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

den Nullvektor als einziges Element enthält?

Antwort. Nein, es gibt mindestens einen freien Parameter und die Verträglichkeitsbedingungen sind trivialerweise erfüllt.
Anders gesagt: Der Rang von G ist höchstens $2 < 3$ (Korollar 1.3).

9.4b) Betrachten Sie eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Ist es möglich, dass die Menge

$$I := \left\{ w \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \text{es existiert ein } v \in \mathbb{R}^3 : \quad Gv = w \right\}$$

alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ enthält?

Antwort. Ja freilich, nämlich wenn die Spalten von G den $\mathbb{R}^2$ aufspannen.

9.4c) Betrachten Sie eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Ist es möglich, dass die Menge

$$K := \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Hv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

den Nullvektor als einziges Element enthält?

Antwort. Ja gewiss, nämlich wenn der Rang von H gleich 2 ist (Korollar 1.3).

9.4d) Betrachten Sie eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{3\times 2}$. Ist es möglich, dass die Menge

$$I := \left\{ w \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \text{es existiert ein } v \in \mathbb{R}^2 : \; Hv = w \right\}$$

alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ enthält?

Antwort. Nie und nimmer: Die zwei Spalten von H erzeugen nicht $\mathbb{R}^3$.