Lösungen Ferienserie 13

---

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Man bestimme mit Hilfe von MATLAB die Jordan-Normalform von A.

(b) Man berechne (von Hand) A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Der Code

```
A=[1 -3 -2;
-1 1 -1;
2 4 5];
% Jordan-Normalform von A in J, Transformationsmatrix in Q abspeichern
[Q, J] = jordan(A)
% Inverse von Q bestimmen (fuer Aufgabe b))
Qinv = inv(Q)
```

liefert die Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und die Transformationsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für die $A = QJQ^{-1}$ gelten.

(b) Es gilt $A^n = (QJQ^{-1})^n = \underbrace{(QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1})}_{\text{n-mal}} = QJ^nQ^{-1}$.

Nach der Formel für die Potenzen von Jordan-Blöcken aus der Vorlesung haben wir

$$J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
A^n = QJ^nQ^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2^n & 2^n - n2^{n-1} & -3^n \\ -2^n & -n2^{n-1} & 0 \\ 2^{n+1} & n2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n - n2^{n-1} & 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2 \cdot 3^n & 2^n - n2^{n-1} - 3^n \\ -n2^{n-1} & 2^n - n2^{n-1} & -n2^{n-1} \\ n2^n & -2^{n+1} + n2^n + 2 \cdot 3^n & n2^n + 3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. Gegeben sei ein Gleichungssystem mit dem reellen Parameter α:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
(2-\alpha)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\
 & & -4x_2 & - & (3-\alpha)x_3 & = & -4 \\
 & & (3-\alpha)x_2 & + & x_3 & = & 2
\end{array}
$$

Für welche α besitzt dieses Gleichungssystem genau eine, unendlich viele, keine Lösung? Zu denjenigen α, für die das Gleichungssystem lösbar ist, bestimme man die Lösungsmenge.

Lösung: Wir bringen das Gleichungssystem zunächst auf Zeilenstufenform:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3+\alpha & -4 \\ 0 & 3-\alpha & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2-\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3-\alpha}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{(3-\alpha)^2}{4} & 2-(3-\alpha) \end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2-\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3-\alpha}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -(\alpha-1)(\alpha-5) & 4(\alpha-1) \end{array}\right).
$$

Das Gleichungssystem besitzt für $\alpha = 1$ somit unendlich viele Lösungen, die Lösungsmenge lässt sich durch Rückwärtseinsetzen bestimmen und lautet

$$
\left\{ \left(-\frac{1}{2}t,\, 1 - \frac{1}{2}t,\, t \right) \,:\, t \in \mathbb{R} \right\}.
$$

Für $\alpha = 5$ lautet die dritte Zeile $0 \cdot x_3 = 16$, was ein Widerspruch ist. Das Gleichungssystem hat in diesem Fall also keine Lösung.
Für $\alpha = 2$ liefern die erste und die zweite Zeile $x_3 = 0$, während die dritte Zeile $x_3 = \frac{4}{3}$ impliziert; auch in diesem Fall gibt es also keine Lösung.
Für $\alpha \notin \{1, 2, 5\}$ ist die Lösung eindeutig bestimmt und ist gleich

$$
\left\{ \left(-\frac{\alpha+1}{(2-\alpha)(5-\alpha)}, \frac{2}{5-\alpha}, \frac{4}{5-\alpha} \right) \right\}.
$$

3. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -7 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis für Kern A.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für Bild A.

(c) Konstruieren Sie aus den Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ (bzgl. des Standardskalarproduktes), indem Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren verwenden.

Lösung: Zunächst bringen wir die Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ -2 & 3 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -7 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 7 & 6 & 13 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -7 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 6 & 13 \\ 0 & -7 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Der Kern von A umfasst alle $x \in \mathbb{R}^5$ mit $Ax = 0$. Eine Basis von Kern A findet man also durch Rückwärtseinsetzen, ausgehend von der obigen Zeilenstufenform:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Das Bild von A wird von den Spalten von A aufgespannt. Da sich die Pivot-Elemente der obigen Zeilenstufenform in der ersten, zweiten und vierten Spalte befinden, ist eine Basis von Bild A durch die erste, zweite und vierte Spalte von A gegeben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Es induziert die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^3$. Wir bezeichnen die noch zu berechnende orthonormale Basis mit $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ und führen das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren durch.

Berechnung von $b^{(1)}$: $b^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

Berechnung von $b^{(2)}$:

$$\langle a^{(2)}, b^{(1)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\rangle = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow c^{(2)} = a^{(2)} - \langle a^{(2)}, b^{(1)}\rangle\, b^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - \sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b^{(2)} = \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Berechnung von $b^{(3)}$:

$$\langle a^{(3)}, b^{(1)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\rangle = 0,$$

$$\langle a^{(3)}, b^{(2)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\right\rangle = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow c^{(3)} = a^{(3)} - \langle a^{(3)}, b^{(1)}\rangle\, b^{(1)} - \langle a^{(3)}, b^{(2)}\rangle\, b^{(2)}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

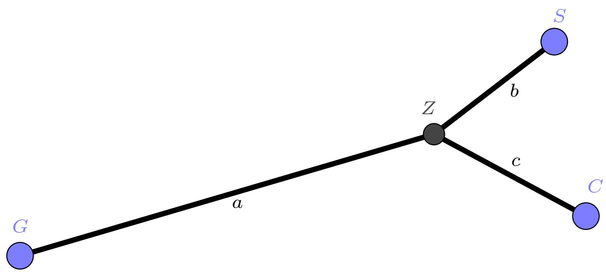
$$\Rightarrow b^{(3)} = \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|_2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert somit die folgende orthonormale Basis:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}.$$

4. Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:

Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118



Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht und interessiert sich nun für die tatsächlichen Distanzen a, b, c.

(a) Bestimmen Sie für ihn die ausgeglichenen Werte für die Längen a, b, c der Teilstrecken durch Lösen der Normalgleichungen.

(b) (i) Bestimmen Sie a, b, c mit Hilfe der QR–Zerlegung in Matlab.
Hinweis: In Matlab liefert der Befehl `[q,r] = qr(A)` die QR–Zerlegung der Matrix `A`.

(ii) Lösen Sie diese Aufgabe nochmals mit dem '\'–Operator in Matlab.

Lösung:

(a) Die Fehlergleichungen des Ausgleichsproblem lauten ($x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$)

$$Ax - c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 280 \\ 390 \\ 400 \\ 210 \\ 118 \end{pmatrix} = r.$$

Daraus lassen sich sofort die Normalgleichungen $A^\top Ax = A^\top c$ aufstellen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1070 \\ 600 \\ 728 \end{pmatrix}.$$

Diese haben die eindeutige Lösung
$a = \frac{1711}{6} = 285 + \frac{1}{6}, \ \ b = \frac{301}{3} = 100 + \frac{1}{3}, \quad c = \frac{685}{6} = 114 + \frac{1}{6}.$

(b)
```
% Loesung von b) (i) mit MATLAB
A = [1 0 0;1 1 0;1 0 1;0 1 1;0 0 1];
% QR-Zerlegung
[Q,R] = qr(A);

c = [280;390;400;210;118];
% c mit Q^T multiplizieren
d = Q'*c;

% Erste 3 Zeilen von d in d0 abspeichern
d0 = d([1 2 3]);
% Erste 3 Zeilen von R in R0 abspeichern
R0 = R([1 2 3],:);

% R0 * x = d0 nach x aufloesen --> x = [a;b;c]
x = R0 \ d0

% Loesung von b) (ii) mit MATLAB
% Normalgleichungen A^T*A*x = A^T*c nach x aufloesen --> x = [a;b;c]
x = (A'*A)\(A'*c)
```

5. Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -1+\alpha \\ 3 & 3\alpha & 3+\beta \\ 2 & 2\beta & 2+\alpha \end{pmatrix}, \text{ wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist B invertierbar?

(b) Berechnen Sie B^{-1} für $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

(c) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass 0 ein Eigenwert von B ist mit geometrischer Vielfachheit 2.

Lösung: Wir bringen B in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -1+\alpha \\ 3 & 3\alpha & 3+\beta \\ 2 & 2\beta & 2+\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -1+\alpha \\ 0 & 0 & 3\alpha+\beta \\ 0 & 2\beta-2\alpha & 3\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -\alpha & -1+\alpha \\ 0 & 2(\beta-\alpha) & 3\alpha \\ 0 & 0 & 3\alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

(a) B ist invertierbar, falls $\det B \neq 0$. Aus der Zeilenstufenform lesen wir ab, dass $\det B = -2(\beta-\alpha)(3\alpha+\beta)$ gilt. Damit ist B invertierbar, falls $\alpha \neq \beta$ und $\beta \neq -3\alpha$ gilt.

(b) Wir rechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right).$$

Somit gilt $B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Damit B den Eigenwert 0 mit geometrischer Vielfachheit 2 hat, muss der Rang von B gleich 1 sein, in der Zeilenstufenform von B müssen somit zwei Nullzeilen vorkommen. Dies ist genau für $\alpha = \beta = 0$ der Fall.

6. Gegeben sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A.

(b) Bestimmen Sie eine orthonormale Eigenbasis zu A.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren von A^4.

Lösung:

(a) A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Dazugehörige Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Da A symmetrisch ist und die Eigenwerte verschieden sind, müssen die Eigenvektoren aus a) nur normiert werden, da sie bereits orthogonal sein müssen. Somit ist
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$
eine orthonormale Eigenbasis zu A.

(c) Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt
$$A^4 v = A^3(Av) = A^3(\lambda v) = \lambda A^3 v = \dots \lambda^4 v.$$
A^4 hat also die Eigenwerte $\lambda_1^4 = 0$, $\lambda_2^4 = 81$ und $\lambda_3^4 = 1296$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind die gleichen wie für A, also $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \\ 2 & -4 & 4 & 6 \\ 3 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenräume von A. Geben Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

(b) Ist A diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = T^{-1}AT$ gilt.

Lösung:

(a) Wir berechnen die Eigenwerte:

$$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & -2 & -3 \\ 2 & -4 & 4-\lambda & 6 \\ 3 & -6 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2-\lambda & -2 & -3 \\ 0 & \lambda(\lambda-3) & 2\lambda & 3\lambda \\ 0 & -2\lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -3\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda^3(\lambda - 16).$$

Die Eigenwerte von A sind damit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 16$. Die dazugehörigen Eigenräume sind

$$E_0 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$E_{16} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die algebraische und geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 0$ ist gleich 3 und die algebraische und geometrische Vielfachheit von $\lambda_2 = 16$ gleich 1.

(b) A ist diagonalisierbar und es gilt $D = T^{-1}AT$ für

$$T = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

8.

(a) Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h., bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

(b) Bestimmen Sie die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = Ay$$

mit der Koeffizientenmatrix A aus Teil a) zu den Anfangsbedingungen

$$y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 5,\ y_3(0) = -2.$$

Lösung:

(a) Es gilt $T^{-1}AT = D$ für

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von T sind dabei die Eigenvektoren von A, die zugehörigen Eigenwerte sind die Einträge von D.

(b) Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir die Anfangsbedingungen ein, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

welches die eindeutige Lösung $c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 2$ besitzt. Die Lösung zu den gegebenen Anfangsbedingungen ist damit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 4e^t \\ 1 + 4e^t \\ 2 - 4e^t \end{pmatrix}.$$

9. Sei $\mathcal{P}_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2. Sei $\mathcal{A} = \left\{a^{(1)} := 1,\ a^{(2)} := 1 + 2x,\ a^{(3)} := x^2 + x - 1\right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2$ ist.

(b) Sei $p(x) := 5x^2 + x - 3$. Schreiben Sie $p(x)$ in den Koordinaten der Basis $\mathcal{A}$.

(c) Bestimmen Sie alle Vektoren aus $\mathcal{P}_2$, welche bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

senkrecht auf $a^{(1)}$ stehen.

(d) Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{P}_2$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle .\,, .\rangle$.

Lösung:

(a) Mit der Basis $\mathcal{A}$ lassen sich offensichtlich die Basisvektoren der Standardbasis $\{1, x, x^2\}$ als Linearkombination darstellen, welche ihrerseits $\mathcal{P}_2$ erzeugen. Damit ist auch $\mathcal{A}$ erzeugend. Weiter sind 3 erzeugende Vektoren von $\mathcal{P}_2$ auch linear unabhängig und damit eine Basis.

(b) Für die Koordinaten machen wir den folgenden Ansatz:

$$5x^2 + x - 3 = a \cdot 1 + b(1 + 2x) + c(x^2 + x - 1).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

welches die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

besitzt. Dies sind die Koordinaten von $p(x)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

(c) Ein allgemeines Element aus $\mathcal{P}_2$ ist von der Form $q(x) = ax^2 + bx + c$. Damit $q(x)$ senkrecht auf $a^{(1)}$ steht, muss

$$0 \overset{!}{=} \langle q(x), a^{(1)}(x)\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} q(x)a^{(1)}(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(ax^2 + bx + c)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3} + 2c\right)$$

gelten. Dies ist gleichbedeutend mit $a = -3c$ und wir erhalten, dass alle Polynome der Form

$$q(x) = -3cx^2 + bx + c$$

mit $b,\ c \in \mathbb{R}$ senkrecht auf $a^{(1)} = 1$ stehen bezüglich des gegebenen Skalarprodukts.

(d) Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das gegebene Skalarprodukkt auf $\mathcal{P}_2$. Es induziert die Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{P}_2$. Wir bezeichnen die noch zu berechnende orthonormale Basis mit $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ und führen das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren durch.

Berechnung von $b^{(1)}$:

$$\begin{aligned}\|a^{(1)}\|^2 &= \langle 1,1\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1dx = 1\\ \Rightarrow b^{(1)} &= \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} = \frac{1}{1} = 1.\end{aligned}$$

Berechnung von $b^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\langle a^{(2)},\, b^{(1)}\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = 1\\ \Rightarrow c^{(2)} &= a^{(2)} - \langle a^{(2)},\, b^{(1)}\rangle\, b^{(1)} = 1+2x-1 = 2x,\\ \|c^{(2)}\|^2 &= \langle 2x, 2x\rangle = \int_{-1}^{1} 2x^2dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\\ \Rightarrow\ b^{(2)} &= \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}2x = \sqrt{3}x.\end{aligned}$$

Berechnung von $b^{(3)}$:

$$\begin{aligned}\langle a^{(3)},\, b^{(1)}\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{3},\\ \langle a^{(3)},\, b^{(2)}\rangle &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)(\sqrt{3}x)dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \Rightarrow c^{(3)} &= a^{(3)} - \langle a^{(3)},\, b^{(1)}\rangle\, b^{(1)} - \langle a^{(3)},\, b^{(2)}\rangle\, b^{(2)}\\ &= x^2+x-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}x = x^2-\frac{1}{3}\\ \|c^{(3)}\|^2 &= \left\langle x^2-\frac{1}{3}, x^2-\frac{1}{3}\right\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{9}x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{45}\\ \Rightarrow b^{(3)} &= \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|} = \frac{\sqrt{45}}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1).\end{aligned}$$

Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert somit die folgende orthonormale Basis:

$$\left\{1,\ \sqrt{3}x,\ \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1)\right\}.$$

10. Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3. Gegeben sei folgende Abbildung:

$$\mathcal{F}: \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_3 & \to & \mathcal{P}_3 \\ p(x) & \mapsto & p''(x) + xp'(x) \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\}$.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix B von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2 := \{1 + x^3, x - x^2, x^2 + x^3, x^3\}$.

Lösung:

(a) Wir rechnen für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_3$ die Linearität von $\mathcal{F}$ direkt nach:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha p(x) + \beta q(x)) &= (\alpha p(x) + \beta q(x))'' + x(\alpha p(x) + \beta q(x))' \\ &= \alpha p''(x) + \beta q''(x) + x\alpha p'(x) + x\beta q'(x) \\ &= \alpha(p''(x) + xp'(x)) + \beta(q''(x) + xq'(x)) \\ &= \alpha\mathcal{F}(p(x)) + \beta\mathcal{F}(q(x)). \end{aligned}$$

(b) Die Koordinaten der Bilder der Basis bilden die Spalten der Darstellungsmatrix.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(1) &= 0, \\ \mathcal{F}(x) &= x, \\ \mathcal{F}(x^2) &= 2 + x \cdot 2x = 2 + 2x^2, \\ \mathcal{F}(x^3) &= 6x + x \cdot 3x^2 = 6x + 3x^3. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit $A = [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) Wir könnten hier analog zur vorherigen Teilaufgabe vorgehen, wollen aber eine Lösung via Basiswechsel präsentieren. Wie wir wissen, gilt

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}_2} = [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} \cdot [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}_1} \cdot [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}.$$

Dabei bezeichnet $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ die Matrix zum Basiswechsel von der Basis $\mathcal{B}_2$ in die Basis $\mathcal{B}_1$. In den Spalten stehen also die Koordinaten der Vektoren aus der Basis $\mathcal{B}_2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$. Da $\mathcal{B}_1$ die Standardbasis ist, kann man diese direkt ablesen (das ist analog zur Berechnung der Matrix T beim Diagonalisieren, siehe zum Beispiel Aufgabe 7):

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = ([\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2})^{-1}$, also

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechnung liefert nun

$$B = [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 6 \\ 6 & -1 & 8 & 6 \\ -3 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reelle Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume von V sind und geben Sie allenfalls eine Basis an:

(a) $U = \left\{A \in V \,\middle|\, A^\top = A\right\}$

(b) $W = \left\{A \in V \,\middle|\, \det(A) = 0\right\}$

(c) $Y = \left\{A \in V \,\middle|\, A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0\right\}$

Lösung: Eine Teilmenge U von V heisst Untervektorraum, falls diese drei Eigenschaften erfüllt sind (für alle $A, B \in U, \lambda \in \mathbb{R}$):

- U ist nicht leer;
- $A + B \in U$;
- $\lambda A \in U$.

(a) U ist ein Unterraum von V, denn:

- U ist nicht leer, da zum Beispiel $I_2 \in U$.
- Es gilt $(A+B)^\top = A^\top + B^\top = A + B$, also $A + B \in U$.
- Es gilt $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top = \lambda A$, also $\lambda A \in U$.

Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ beliebig. Damit $A \in U$ gilt, muss

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = A^\top$$

gelten, also $b = c$. U hat also 3 Freiheitsgrade, somit ist es ein 3-dimensionaler Vektorraum. Eine Basis von U ist beispielsweise durch

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

gegeben.

(b) W ist kein Untervektorraum von V, denn der zweite Punkt in der obigen Definition ist verletzt. Wählen wir nämlich $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt $A, B \in W$, aber $A + B \notin W$, denn

$$\det(A+B) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \neq 0.$$

(c) Y ist ein Unterraum von V, denn:

- Y ist nicht leer, da zum Beispiel $0 \in Y$.

- Es gilt $(A+B)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$, also $A + B \in Y$.
- Es gilt $(\lambda A)\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda A\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$, also $\lambda A \in Y$.

Sei nun $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$ beliebig. Damit $A \in Y$ gilt, muss

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelten. Die erste Zeile liefert $3a + 7b = 0$, also $a = -\frac{7}{3}b$; die zweite Zeile liefert analog $c = -\frac{7}{3}d$. Es gilt also

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = -\frac{7}{3}b, c = -\frac{7}{3}d, b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Y hat also 2 Freiheitsgrade, somit ist es ein 2-dimensionaler Vektorraum. Eine Basis von Y ist beispielsweise durch

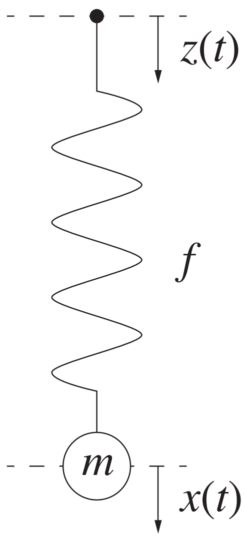
$$\left\{ \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

12. Eine Masse m hängt an einer Feder mit Federkonstante f. Der Aufhängepunkt wird gemäss $z(t) = z_0 \cos(\omega t)$ aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Die resultierende Auslenkung der Masse aus ihrer Ruheposition sei $x(t)$. Wir nehmen an, die Reibung sei proportional zur Geschwindigkeit $x'(t)$. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$mx''(t) = -f(x(t) - z(t)) - bx'(t).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Dämpfung durch die Reibung unterkritisch ist, d.h. $0 < b < 2\sqrt{fm}$.



(a) Man finde eine Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung.

(b) Man bestimme eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Hinweis: Man rechne komplex.

(c) Man bestimme das Schwingungsverhalten nach langer Zeit, d.h. nach Abklingen des Einschwingvorgangs.

(d) Man diskutiere das Resonanzverhalten, d.h. die Amplitude und die Phasenverschiebung

- bei sehr niedriger Anregungsfrequenz ω;
- bei sehr hoher Anregungsfrequenz ω;
- im Resonanzfall (bei maximaler Amplitude).

Lösung:

(a) Die dazugehörige homogene Gleichung lautet

$$mx''(t) = -fx(t) - bx'(t)$$

und ist äquivalent zum System 1. Ordnung

$$Y' = AY$$

mit

$$Y := \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{f}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind gegeben durch

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{f}{m} & -\frac{b}{m} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{f}{m} \overset{!}{=} 0.$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{m^2} - 4\frac{f}{m}}}{2} = A \pm Bi$$

mit $A := -\frac{b}{2m} < 0$ und $B := \sqrt{\frac{f}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$. Dabei ist $B > 0$, weil wir $b < 2\sqrt{fm}$ angenommen haben.

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2}$ sind durch

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\lambda_{1,2} & 1 & 0 \\ -\frac{f}{m} & -\lambda_{1,2} - \frac{b}{m} & 0 \end{array} \right)$$

gegeben. Weil die algebraische Vielfachheit der beiden Eigenwerte 1 ist, ist auch deren geometrische Vielfachheit 1. Daher erfüllt eine Lösung der ersten Zeile dieses LGS automatisch die zweite Zeile. Somit sind die Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2}$ durch $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1,2} \end{pmatrix}$ gegeben.

Daher bilden $Y_i(t) = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, eine Basis des Lösungsraums von $Y' = AY$. Die gesuchte Funktion x ist die erste Komponente von Y, also ist $x_i(t) = e^{\lambda_i t}$, $i = 1, 2$, eine Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung.

(b) Wir rechnen komplex und beachten, dass

$$z(x) = z_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}(z_0 e^{i\omega t})$$

gilt. Daher ist der Realteil einer partikulären Lösung von

$$x''(t) + \frac{f}{m}x(t) + \frac{b}{m}x'(t) = \frac{z_0 f}{m} e^{i\omega t} \tag{1}$$

eine partikuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

Wir bestimmen eine partikuläre Lösung von (1) mit Variation der Konstanten, also mit dem Ansatz

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) = c_1(t)e^{\lambda_1 t} + c_2(t)e^{\lambda_2 t}.$$

Nach einem Satz aus der Vorlesung ist ein solches $x(t)$ eine partikuläre Lösung für

$$c_1(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{W_1(u)}{W(u)}\, du, \quad c_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{W_2(u)}{W(u)}\, du$$

für ein beliebiges t_0, wobei

$$W(u) = \det\begin{pmatrix} x_1(u) & x_2(u) \\ x_1'(u) & x_2'(u) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 u} & e^{\lambda_2 u} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 u} & \lambda_2 e^{\lambda_2 u} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)u},$$

$$W_1(u) = \det\begin{pmatrix} 0 & e^{\lambda_2 u} \\ \frac{z_0 f}{m} e^{i\omega u} & \lambda_2 e^{\lambda_2 u} \end{pmatrix} = -\frac{z_0 f}{m} e^{(\lambda_2 + i\omega)u},$$

$$W_2(u) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 u} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 u} & \frac{z_0 f}{m} e^{i\omega u} \end{pmatrix} = \frac{z_0 f}{m} e^{(\lambda_1 + i\omega)u}.$$

Mit $t_0 = -\infty$ erhalten wir wegen $\mathrm{Re}(\lambda_1) = \mathrm{Re}(\lambda_2) = -\frac{b}{2m} < 0$

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{W_1(u)}{W(u)}\,du = -\frac{z_0 f}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_{-\infty}^{t} e^{(i\omega - \lambda_1)u}\,du \\ &= \frac{z_0 f}{m(\lambda_1 - \lambda_2)(i\omega - \lambda_1)} e^{(i\omega-\lambda_1)u}\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{z_0 f}{m(\lambda_1 - \lambda_2)(i\omega - \lambda_1)} e^{(i\omega-\lambda_1)t}, \\ c_2(t) &= \int_{-\infty}^{t} \frac{W_2(u)}{W(u)}\,du = \frac{z_0 f}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_{-\infty}^{t} e^{(i\omega - \lambda_2)u}\,du \\ &= \frac{z_0 f}{m(\lambda_2 - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} e^{(i\omega-\lambda_2)u}\Big|_{-\infty}^{t} = \frac{z_0 f}{m(\lambda_2 - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} e^{(i\omega-\lambda_2)t}. \end{aligned}$$

Somit haben wir die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{z_0 f}{m(\lambda_1 - \lambda_2)(i\omega - \lambda_1)} e^{(i\omega-\lambda_1)t} e^{\lambda_1 t} + \frac{z_0 f}{m(\lambda_2 - \lambda_1)(i\omega - \lambda_2)} e^{(i\omega-\lambda_2)t} e^{\lambda_2 t} \\ &= \frac{z_0 f}{m(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\frac{1}{i\omega - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2 - i\omega}\right) e^{i\omega t} \\ &= \frac{z_0 f(\lambda_2 - \lambda_1)}{m(\lambda_1 - \lambda_2)(i\omega - \lambda_1)(\lambda_2 - i\omega)} e^{i\omega t} = \frac{z_0 f}{m(\lambda_1 - i\omega)(\lambda_2 - i\omega)} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

der Gleichung (1) gefunden. Mit dem Satz von Vieta angewendet auf die Lösungen $\lambda_{1,2}$ der quadratischen Gleichung $\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \frac{f}{m} = 0$ oder durch direktes Rechnen erhalten wir

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{f}{m},\ \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{m}.$$

Damit lässt sich der Nenner in der obigen Lösung in Real- und Imaginärteil aufspalten:

$$x_p(t) = \frac{z_0 f}{m(\lambda_1\lambda_2 - \omega^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)i\omega)} e^{i\omega t} = \frac{z_0 f}{f - m\omega^2 + b\omega i} e^{i\omega t}$$

Wir schreiben nun $C := \frac{z_0 f}{f - m\omega^2 + b\omega i}$ in Polarform $C = ae^{i\delta}$ mit

$$a = |C| = \frac{z_0 f}{\sqrt{(f - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

und

$$\delta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b\omega}{m\omega^2 - f}\right), & f > m\omega^2 \\ -\frac{\pi}{2}, & f = m\omega^2 \\ \arctan\left(\frac{b\omega}{m\omega^2 - f}\right) - \pi, & f < m\omega^2. \end{cases}$$

Damit gilt $x_p(t) = ae^{i(\omega t + \delta)}$ und

$$\mathrm{Re}(x_p(t)) = a\cos(\omega t + \delta)$$

ist eine partikuläre Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

(c) Die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist die Summe der partikulären Lösung aus b) und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also gleich

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + a\cos(\omega t + \delta).$$

Man beachte nun, dass mit den Konstanten $A < 0$ und $B > 0$ aus a)

$$|e^{\lambda_1 t}| = |e^{At} e^{Bit}| = e^{At} \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt. Analog haben wir $|e^{\lambda_2 t}| \stackrel{t\to\infty}{\to} 0$. Somit bleibt nach dem Abklingen des Einschwingvorgangs nur die partikuläre Lösung aus b) übrig:

$$x(t) \sim a\cos(\omega t + \delta).$$

(d)
- Für $\omega \to 0$ gilt $\delta \to \arctan(0) = 0$ und $a \to z_0 \frac{f}{f} = z_0$. Bei sehr niedriger Anregungsfrequenz ist die Phasenverschiebung also annähernd gleich Null und die Amplitude ist annähernd gleich der Amplitude der Bewegung des Aufhängepunkts.
- Für $\omega \to \infty$ gilt $\frac{b\omega}{m\omega^2 - f} \to \frac{\frac{b}{\omega}}{m - \frac{f}{\omega^2}} \to 0$ und somit $\delta \to -\pi$. Die Amplitude ist in diesem Fall gleich

$$a = \frac{\frac{z_0 f}{\omega^2}}{\sqrt{(\frac{f}{\omega^2} - m)^2 + \frac{b^2}{\omega^2}}},$$

also $a \to 0$ für $\omega \to \infty$. Somit schwingt die Masse annähernd entgegengesetzt zum Aufhängepunkt und die Amplitude ist sehr klein.
- Die Amplitude wird maximal, wenn

$$(f - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2 = m^2\left(\omega^2 + \frac{b^2}{2m^2} - \frac{f}{m}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{2m} - f\right)^2 + f^2 \quad (2)$$

minimal ist.
Falls $\frac{b^2}{2m^2} - \frac{f}{m} < 0 \Leftrightarrow b < \sqrt{2fm}$ gilt, ist dies für $\omega^2 = \frac{f}{m} - \frac{b^2}{2m^2}$, also für

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$$

der Fall. In diesem Fall ist die Amplitude gleich

$$a = \frac{z_0 f}{\sqrt{\frac{b^2 f}{m} - \frac{b^4}{4m^2}}}.$$

Weiter gilt in diesem Fall

$$f = m\omega^2 + \frac{b^2}{2m} > m\omega^2$$

und damit

$$\begin{aligned}\delta &= \arctan\left(\frac{b\omega}{m\omega^2 - f}\right) = \arctan\left(\frac{b\sqrt{\frac{f}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}}{-\frac{b^2}{2m}}\right) \\ &= \arctan\left(-\frac{2}{b}\sqrt{fm - \frac{b^2}{2}}\right).\end{aligned}$$

Zudem tritt für kleine b der Resonanzfall für $\omega \approx \sqrt{\frac{f}{m}}$ ein, d.h. wenn die Anregungsfrequenz ungefähr gleich der Eigenfrequenz des Systems ist. Dann gilt approximativ $f \approx m\omega^2$ und somit $\delta \approx -\frac{\pi}{2}$.

Falls $\frac{b^2}{2m^2} - \frac{f}{m} \geq 0 \Leftrightarrow b \geq \sqrt{2fm}$ gilt, d.h. wenn die Dämpfung grösser, aber noch unterkritisch ist, ist (2) für $\omega = 0$ minimal. In diesem Fall wird die Amplitude also für $\omega \to 0$ maximal (siehe oben für die Diskussion dieses Falls) mit Amplitude $a = z_0$ und Phasenverschiebung $\delta = 0$.

13. Wir betrachten den Unterraum $C_0^2([0,\pi]) := \{f \in C^2([0,\pi]) : f(0) = f(\pi) = 0\}$ von $C^2([0,\pi])$ und die lineare Abbildung

$$A : C_0^2([0,\pi]) \to C([0,\pi]), f \mapsto f''.$$

(a) Man bestimme die Eigenwerte λ und Eigenvektoren $\phi \in C_0^2([0,\pi])$ (Eigenfunktionen) von A, d.h. $A\phi = \lambda\phi$.

(b) Man zeige, dass A bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)dx$$

für $f, g \in C_0^2([0,\pi])$ symmetrisch ist, d.h. $\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$, und schliesse daraus, dass die Eigenfunktionen von A ein orthogonales System bilden.

(c) Man normiere die in a) gefundenen Eigenfunktionen und stelle die Funktion $f(x) = x$ in der so gefundenen Eigenbasis von A dar.

Lösung:

(a) Ein Eigenvektor (Eigenfunktion) $\phi \in C_0^2([0,\pi])$ von A erfüllt $\phi \neq 0$ und

$$\phi'' = A\phi = \lambda\phi$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir müssen herausfinden, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ dies möglich ist. Zunächst schliessen wir den Fall $\lambda = 0$ aus. In diesem Fall gilt $\phi'' = 0$, was nur für lineare Funktionen $\phi(x) = ax+b$ möglich ist. Wegen $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ folgt daraus $b = 0$ und $0 = a\pi + b = a\pi$, also auch $a = 0$. Das ist wegen $\phi \neq 0$ nicht möglich.

Wir können also $\lambda \neq 0$ annehmen. Dann ist ϕ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' = \lambda y$, die mit $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ auf das System 1. Ordnung $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

zurückgeführt werden kann. Diese Matrix hat die Eigenwerte $\pm\mu$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mu \end{pmatrix}$, wobei $\mu \in \mathbb{C}$ eine zweite Wurzel von λ ist (d.h. $\mu^2 = \lambda$). Für $\lambda \neq 0$ ist A diagonalisierbar und die allgemeine Lösung von $Y' = AY$ durch $Y(x) = c_1 e^{\mu x} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} + c_2 e^{-\mu x} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mu \end{pmatrix}$ gegeben. Daraus folgt

$$\phi(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$$

für gewisse c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$, die nicht beide Null sind. Da ϕ in $C_0^2([0,\pi])$ liegt, gilt

$$\begin{aligned} \phi(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ \phi(\pi) &= c_1 e^{\mu\pi} + c_2 e^{-\mu\pi} = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $c_1 = -c_2$ und somit $e^{\mu\pi} = e^{-\mu\pi}$, weil $c_1 = -c_2 \neq 0$ gilt. Wir erhalten

$$e^{2\mu\pi} = 1.$$

Das ist nur möglich, falls $2\mu\pi = 2\pi ik \Leftrightarrow \mu = ki$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist, wobei k nicht Null sein kann, weil wir $\lambda = 0$ schon ausgeschlossen haben. Für die Eigenfunktion ϕ folgt also

$$\phi(x) = c_1 e^{kix} - c_1 e^{-kix} = 2c_1 i \sin(kx).$$

Somit sind die Eigenwerte von A genau durch $\lambda = \mu^2 = -k^2$ mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gegeben und die dazugehörigen Eigenfunktionen durch

$$\phi_k(x) = \sin(kx).$$

(b) Für $f, g \in C_0^2([0,\pi])$ folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\langle Af, g\rangle &= \int_0^\pi f''(x)g(x)\,dx = f'(x)g(x)|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)g'(x)\,dx \\ &\overset{g(0)=g(\pi)=0}{=} - \int_0^\pi f'(x)g'(x)\,dx\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\langle f, Ag\rangle &= \int_0^\pi f(x)g''(x)\,dx = f(x)g'(x)|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)g'(x)\,dx \\ &\overset{f(0)=f(\pi)=0}{=} - \int_0^\pi f'(x)g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Somit gilt tatsächlich $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$.
Für $k \neq l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bekommen wir daher

$$\begin{aligned}-k^2\langle \phi_k, \phi_l\rangle &= \langle -k^2\phi_k, \phi_l\rangle = \langle A\phi_k, \phi_l\rangle \\ &= \langle \phi_k, A\phi_l\rangle = \langle \phi_k, -l^2\phi_l\rangle = -l^2\langle \phi_k, \phi_l\rangle,\end{aligned}$$

also $(l^2 - k^2)\langle \phi_k, \phi_l\rangle = 0$, woraus $\langle \phi_k, \phi_l\rangle = 0$ folgt. Somit bilden die $\phi_k,\ k \in \mathbb{N}$, ein orthogonales System.

(c) Für die Berechnung von $\langle \phi_k, \phi_k\rangle$ benutzen wir die Identität $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$:

$$\begin{aligned}\langle \phi_k, \phi_k\rangle &= \int_0^\pi \sin^2(kx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2kx)}{2}\,dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4k}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Wir erhalten also die normierten Funktionen

$$\psi_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\|\phi_k\|} = \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{\langle \phi_k, \phi_k\rangle}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx).$$

Wir verwenden ohne Beweis, dass sich jede Funktion $\phi \in C^2([0,\pi])$ als unendliche Linearkombination dieser normierten Eigenfunktionen darstellen lässt. Daher machen wir den Ansatz

$$f(x) = x = \sum_{k=1}^\infty a_k \psi_k.$$

Weil die ψ_k ein orthonormales System bilden, folgt

$$\langle x, \psi_n \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k,\ \psi_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \langle \psi_k, \psi_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{kn} = a_n,$$

was wir mit partieller Integration ausrechnen können:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx &= -\frac{1}{n} x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx)\, dx \\ &= -\frac{1}{n} \pi (-1)^n + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n}, \\ \Rightarrow a_n = \langle x, \psi_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} &\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{(-1)^{n+1} \sqrt{2\pi}}{n}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Fourierreihendarstellung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin(kx).$$