

## Serie 1

---

Entscheiden Sie bei den folgenden 9 Aufgaben, ob die angegebene Funktion  $f$  linear ist oder nicht.

1.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 0)^\top$

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

2.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

3.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

5.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f$  die Identität

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

6.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

7.  $f : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, h \mapsto h''(0)$

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

8.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f$  die Spiegelung an der Geraden  $y = x + 1$

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

9.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $(x, y)^\top \mapsto h$ , wobei  $h$  diejenige Linearkombination der Funktionen  $\sin$  und  $\cos$  ist, deren Graph durch die Punkte  $(-1, x)$  und  $(1, y)$  geht.

- (a)  $f$  ist linear
- (b)  $f$  ist nicht linear

10. Betrachten Sie die folgende Abbildung  $\mathcal{F}$  von  $\mathbb{R}^2$  in sich:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{F}} x' = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

- a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch.
- b) Durch welche Matrix  $A$  wird  $\mathcal{F}$  beschrieben?

11. Gegeben sei der 4-dimensionale Vektorraum  $\mathcal{P}_3$  der Polynome vom Grad  $\leq 3$ . Zeigen Sie, dass die ersten vier Tschebyscheff-Polynome zweiter Art

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1, U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

eine Basis von  $\mathcal{P}_3$  bilden.

12. Die Vektoren  $a = (1, -2, 5, -3)^T$ ,  $b = (2, 3, 1, -4)^T$  und  $c = (3, 8, -3, -5)^T$  erzeugen einen Unterraum  $W$  von  $\mathbb{R}^4$ .

- a) Bestimmen Sie  $\dim W$  und eine Basis von  $W$ .
- b) Vervollständigen Sie diese Basis zu einer Basis von  $\mathbb{R}^4$ .
- c) Geben Sie ein homogenes LGS an, welches  $W$  als Lösungsraum hat.