

Serie 2

1. Welche der folgenden Vektoren sind Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

- (a) $(1, -2, 1)^\top$.
- (b) $(0, 1, 1)^\top$.
- (c) $(-2, 1, 1)^\top$.
- (d) $(0, 3, 2)^\top$.
- (e) $(1, 1, 1)^\top$.

2. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte ...

- (a) -1 .
- (b) 1 .
- (c) i .
- (d) $-i$.
- (e) $1 - i$.

3. Welche der folgenden Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 2 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 3 \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} 2 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 4 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 6 \\ e^{-\frac{2\pi i}{3}} 3 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 6 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} 9 \end{pmatrix}$$

haben 0 als Eigenwert?

- (a) A_1 .
- (b) A_2 .
- (c) A_3 .
- (d) A_4 .
- (e) Keine.

4. Lösen Sie das Eigenwertproblem zu den folgenden Matrizen, d.h. bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten.

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix},$ b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$

5. Geben Sie in MATLAB die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein.

a) Berechnen Sie mit MATLAB die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

Hinweis: $[V,D] = \text{eig}(A)$ gibt die Eigenwerte in der Diagonalen von D und die zugehörigen Eigenvektoren in den Spalten von V zurück.

b) Lösen Sie mit MATLAB das Eigenwertproblem für A^{-1} , A^2 und A^3 . Was stellen Sie fest?

c) Beweisen Sie nun, dass für eine beliebige $n \times n$ -Matrix M mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor x folgendes gilt:

- i) λ^k ist ein Eigenwert von M^k ($k \in \mathbb{N}$) und x ein zugehöriger Eigenvektor.
- ii) Ist M invertierbar, so ist $1/\lambda$ ein Eigenwert von M^{-1} und x ein zugehöriger Eigenvektor.

6. Für den skizzierten elektrischen Vierpol gilt zwischen Ein- und Ausgang die Beziehung

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

mit der Kettenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{R_2+R_3}{R_2} & R_3 \\ \frac{R_1+R_2+R_3}{R_1 R_2} & \frac{R_1+R_3}{R_1} \end{pmatrix}.$$

Man berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A . Für welche Werte von $\frac{U_1}{I_1}$ hat man (bei beliebigem $I_1 \neq 0$) Widerstandsanpassung

$$\frac{U_2}{I_2} = \frac{U_1}{I_1}?$$

