

Serie 11

1. Die allgemeine Lösung von $y' = ay$ ist $y(x) = e^{ax}$.
 - (a) richtig
 - (b) falsch

2. Sind y_1 und y_2 Lösungen von $y''(x) = a(x)y(x) + b(x)y'(x)$, so ist auch jede Linearkombination von y_1 und y_2 eine Lösung.
 - (a) richtig
 - (b) falsch

3. $\sin(\omega x)$ und $\cos(\omega x)$ sind Lösungen von $y'' + \omega^2 y = 0$.
 - (a) richtig
 - (b) falsch

4. $a \sinh(\omega x) + b \cosh(\omega x)$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.
 - (a) richtig
 - (b) falsch

5. $ae^{\omega x} + be^{-\omega x}$ ist die allgemeine Lösung von $y'' - \omega^2 y = 0$.
 - (a) richtig
 - (b) falsch

6. Lösen Sie folgendes Ausgleichsproblem mit der QR -Zerlegung:

$$\begin{aligned}4x_1 + x_2 - 9 &= r_1 \\7x_1 + x_2 - 12 &= r_2 \\4x_1 + 4x_2 - 15 &= r_3.\end{aligned}$$

Um Ihnen aufwändige Rechnungen zu ersparen, geben wir Q an:

$$Q = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 7 & -4 & -4 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Verifizieren Sie, dass Q orthogonal ist.
- Geben Sie zuerst A und c an, und bestimmen Sie dann R und $d = Q^T c$.
- Lösen Sie das Ausgleichsproblem.
- Bestimmen Sie die Länge des minimalen Residuenvektors r .

7. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung $\dot{y} = Ay$, wobei

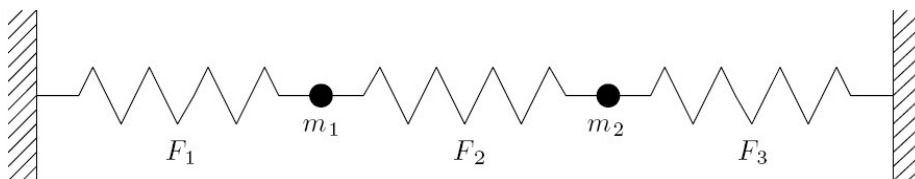
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
- Bestimmen Sie die spezielle Lösung zu den Anfangsbedingungen

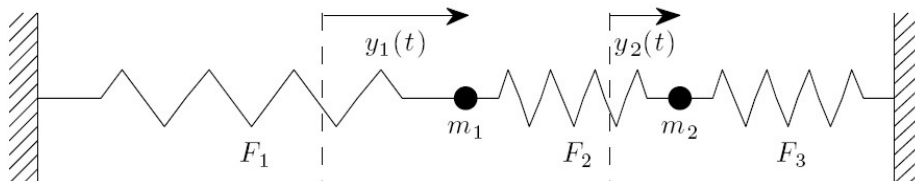
$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y_1(0), y_2(0), y_3(0)$, für welche die zugehörigen Lösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ gegen Null streben für $t \rightarrow +\infty$.

8. Gegeben sei folgendes Massen-Feder-System in Ruhelage:



Zur Zeit t , ausgelenkt aus der Ruhelage, sieht das System wie folgt aus:



Aus dem Hookeschen Federgesetz

$$\text{Kraft einer Feder} = \text{Federkonstante} \cdot \text{Ausdehnung der Feder}$$

und dem Newtonschen Prinzip

$$\text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = \text{Kraft}$$

können wir das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -f_1 y_1 & + f_2 (y_2 - y_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -f_2 (y_2 - y_1) & - f_3 y_2 \end{aligned}$$

herleiten, wobei f_1, f_2, f_3 die Federkonstanten der drei Federn bezeichnen. Wir nehmen an, dass die Federkonstanten mit den Massen wie folgt zusammenhängen: $f_1 = 3m_1, f_2 = 2m_1 = m_2, f_3 = 3m_2$. Die Bewegung wird also durch das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -5y_1 + 2y_2 \\ \ddot{y}_2 &= y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

beschrieben. Bestimmen Sie die Lösung dieses Systems zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 6, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= 0. \end{aligned}$$