1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum in $\mathbb{R}$. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Wenn $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, dann besitzt $A \setminus \mathbb{Q}$ auch ein Maximum.

○ Richtig

● Falsch

Lösung: Wir geben ein Gegenbeispiel: Sei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}$, wobei $c \in \mathbb{Q}$ ist. Dann ist $\max(A) = c$, aber $A \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x \leq c\}$ hat kein Maximum.

(b) Sei $A = \left\{\frac{1}{1+n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Dann gilt

○ $\max(A) = 1$, $\min(A) = 0$.

● $\max(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.

○ A hat kein Maximum, $\inf(A) = 0$.

○ $\sup(A) = 1$, $\min(A) = 0$.

(c) Sei S eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Supremum. Dann gilt:

○ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine obere Schranke b von S, so dass $a - \varepsilon < b < a$;

○ $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Maximum;

● $S \cup \{a\}$ besitzt ein Maximum;

1.2. Ordnung der reellen Zahlen. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen über die Ordnung der reellen Zahlen. Geben Sie jede Verwendung der Axiome O1–O4 und K1, K2 explizit an.

(i) Für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ und $0 < u < v$ gilt $x \cdot u < y \cdot v$.

(ii) Für alle $s, t, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ und $\alpha < 0$ gilt $\alpha \cdot s > \alpha \cdot t$.

Lösung:

(i) Aus $y > x$ folgt durch Subtraktion von x, dass $y - x > 0$ (Axiom K1). Da auch $u > 0$ gilt, folgt daraus $(y - x) \cdot u \geq 0$ (Axiom K2). Es kann nicht $(y - x) \cdot u = 0$ gelten, da $\mathbb{R}$ ein Körper ist und somit keine Nullteiler enthält (vgl. Abschnitt 5.5.4 im Diskrete Mathematik Skript). Also gilt $(y - x) \cdot u > 0$. Analog erhalten wir $y \cdot (v - u) > 0$. Durch Addition von $(y - x) \cdot u$ (Axiom K1) folgt

$$y \cdot v - x \cdot u = y \cdot (v - u) + (y - x) \cdot u \geq (y - x) \cdot u. \tag{1}$$

Da wir schon wissen, dass die rechte Seite von (1) grösser als 0 ist, folgt aus der Transitivität (Axiom O2), dass

$$y \cdot v - x \cdot u \geq 0. \tag{2}$$

Würde in (2) Gleichheit gelten, so wäre wegen (1) sowohl $(y-x) \cdot u \leq 0$ als auch $(y-x) \cdot u > 0$ (zuvor gezeigt), was der Antisymmetrie (Axiom O3) widerspricht. Somit gilt in (2) die strikte Ungleichung $>$. Letztlich verwenden wir Axiom K1, um $x \cdot u$ zu addieren, woraus wie gewünscht $y \cdot v > x \cdot u$ folgt.

(ii) Da $\alpha < 0$ ist, folgt durch Addition von $-\alpha$, dass $-\alpha > 0$ (Axiom K1). Wie am Beginn des Beweises von Teil (i) können wir folgern, dass $(-\alpha) \cdot (t-s) > 0$. Multiplizieren wir dies mittels Distributivität aus, so erhalten wir

$$(-\alpha) \cdot t + (-\alpha) \cdot (-s) > 0. \tag{3}$$

Korollar 1.1.6(3) (ausführlichere Version aus der Vorlesung) impliziert $(-\alpha) \cdot t = -\alpha \cdot t$ und $(-\alpha) \cdot (-s) = \alpha \cdot s$. Somit besagt (3), dass $\alpha \cdot s - \alpha \cdot t > 0$. Mit Axiom K1 dürfen wir $\alpha \cdot t$ addieren, und schliessen wie gewünscht $\alpha \cdot s > \alpha \cdot t$.

1.3. Monotonie und Eindeutigkeit von Wurzeln. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

(i) Zeigen Sie, dass

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

(ii) Folgern Sie, dass aus $0 \leq a < b$ folgt, dass $0 \leq a^n < b^n$.

(iii) Folgern Sie, dass jede reelle Zahl t höchstens eine nichtnegative n-te Wurzel hat, also dass es höchstens eine reelle Zahl $a \geq 0$ gibt mit $a^n = t$.

Lösung:

(i) Aus der Distributivität der Multiplikation folgt

$$\begin{aligned}
&(b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) \\
&\quad = b(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) - a(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) \\
&\quad = (b^n + b^{n-1}a + \cdots + b^2a^{n-2} + ba^{n-1}) - (ab^{n-1} + b^{n-2}a^2 + \cdots + ba^{n-1} + a^n),
\end{aligned}$$

und aus der Assoziativität und Kommutativität der Addition und Multiplikation folgt

$$\begin{aligned}
&(b^n + b^{n-1}a + \cdots + b^2a^{n-2} + ba^{n-1}) - (b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + \cdots + ba^{n-1} + a^n) \\
&\quad = b^n + (b^{n-1}a - ab^{n-1}) + \cdots + (ba^{n-1} - a^{n-1}b) - a^n \\
&\quad = b^n - a^n.
\end{aligned}$$

(ii) Aus $0 \leq a < b$ folgt mit den Kompatibilitätsaxiomen der Ordnung, dass $a^n \geq 0$ und dass $b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1} > 0$, da alle Summanden nichtnegativ sind und zumindest der erste Summand b^{n-1} strikt positiv ist. Da auch $b - a > 0$ ist, folgt

$$(b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) > 0.$$

Die linke Seite letzterer Ungleichung ist aufgrund von Teil (i) aber gleich $b^n - a^n$. Wir erhalten also $b^n > a^n$. Somit haben wir gezeigt, dass $0 \leq a^n < b^n$, wenn $0 \leq a < b$.

(iii) Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene nichtnegative reelle Zahlen a, b gibt, deren n-te Potenz gleich t ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a < b$ (ansonsten vertauschen wir a und b). Dann folgt aus Teil (ii), dass $a^n < b^n$ gilt, was der Annahme widerspricht.

1.4. Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Lesen Sie über die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ im Buch von Königsberger: Satz 4 und Satz 5 in Kapitel 2.3. (LINK)

1.5. Supremum und Infimum I. Seien A, B zwei nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie das Supremum von $s \cdot A := \{s \cdot a \mid a \in A\}$.
Hinweis: Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von s.

(ii) Zeigen Sie, dass für die Menge $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ gilt:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Lösung: Wir verwenden die folgende Charakterisierung des Supremums einer Menge: $R = \sup A \iff$ die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- für alle Elemente $a \in A$ gilt $a \leq R$;
- für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein Element $a \in A$, so dass $a > R - \varepsilon$.

Die erste dieser Bedingungen bedeutet genau, dass R eine obere Schranke von A ist, und die zweite Bedingung besagt genau, dass es keine kleinere obere Schranke von A geben kann. Somit beschreiben die beiden Bedingungen zusammen gemäss Definition genau das Supremum von A.

(i) Wir behaupten, dass

$$\sup(s \cdot A) = \begin{cases} s \cdot \sup(A), & \text{falls } s \geq 0, \\ s \cdot \inf(A), & \text{falls } s < 0. \end{cases}$$

Der Fall $s = 0$ ist unkompliziert: $\sup(s \cdot A) = 0 = 0 \cdot \sup(A)$, da $s \cdot A = \{0\}$. Wir nehmen nun an, dass $s > 0$. Sei $R \in \mathbb{R}$ das Supremum von A. Dann gilt für alle $a \in A$, dass $s \cdot a \leq s \cdot R$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $a > R - \frac{\varepsilon}{s}$. Es folgt für das Element $s \cdot a$ von $s \cdot A$, dass $s \cdot a > s \cdot (R - \frac{\varepsilon}{s}) = s \cdot R - \varepsilon$. Somit haben wir die beiden obigen Bedingungen für das Supremum für die Zahl $s \cdot R$ verifiziert. In anderen Worten haben wir gezeigt, dass $\sup(s \cdot A) = s \cdot R = s \cdot \sup(A)$, falls $s > 0$. Sei nun $s < 0$ und bezeichne mit r das Infimum von A. Dann gilt für alle $a \in A$, dass $s \cdot a \leq s \cdot r$ (da die Multiplikation mit der negativen Zahl s die Ungleichung $a \geq r$ "umdreht"). Sei nun wieder $\varepsilon > 0$. Dann gibt aufgrund der Charakterisierung des Infimums von A als grösste untere Schranke ein $a \in A$ mit $a < r + \frac{\varepsilon}{-s}$. Dann gilt für das Element $s \cdot a$ von $s \cdot A$, dass $s \cdot a > s \cdot (r + \frac{\varepsilon}{-s}) = s \cdot r - \varepsilon$. Somit haben wir die beiden Bedingungen am Anfang der Lösung für das Supremum für die Zahl $s \cdot r$ verifiziert. In anderen Worten haben wir gezeigt, dass $\sup(s \cdot A) = s \cdot r = s \cdot \inf(A)$, falls $s < 0$.

(ii) Seien $R_A = \sup(A)$ und $R_B = \sup(B)$. Für alle Elemente $a \in A, b \in B$ gilt dann, dass $a + b \leq R_A + R_B$. Sei nun $\varepsilon > 0$ und wähle $a \in A$ mit $a > R_A - \frac{\varepsilon}{2}$ und $b \in B$ mit $b > R_B - \frac{\varepsilon}{2}$. Dies ist möglich aufgrund der einleitenden Charakterisierung des Supremums oben. Es folgt für das Element $a + b$ von $A + B$, dass $a + b > R_A - \frac{\varepsilon}{2} + R_B - \frac{\varepsilon}{2} = R_A + R_B - \varepsilon$. Somit haben wir die beiden Bedingungen in der Charakterisierung des Supremums für die Zahl $R_A + R_B$ verifiziert. In anderen Worten haben wir gezeigt, dass $\sup(A + B) = R_A + R_B = \sup(A) + \sup(B)$.

1.6. Supremum und Infimum II. Bestimmen Sie das Infimum und Supremum und, falls vorhanden, das Minimum und Maximum der folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A_1 = \left\{ t + \frac{1}{t} \,\middle|\, t \in (0, \infty) \right\},$$
$$A_2 = \left\{ \frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} \,\middle|\, k, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Lösung: Wegen $t + \frac{1}{t} \geq t$ ist klar, dass $\sup A_1 = \infty$. Die Menge A_1 hat also insbesondere kein Maximum. Für $t = 1$ gilt $t + \frac{1}{t} = 2$, also ist $\inf(A_1) \leq 2$. Auf der anderen Seite ist die Ungleichung $t + \frac{1}{t} \geq 2$ für $t > 0$ äquivalent zu

$$0 \leq t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

(Multiplikation mit der positiven Zahl t). Da letztere Ungleichung $(t-1)^2 \geq 0$ immer wahr ist (Korollar 1.1.6(5)), ist auch die Ungleichung $t + \frac{1}{t} \geq 2$ für $t > 0$ immer wahr. Somit ist 2 eine untere Schranke von A_1, und damit ist $\inf(A_1) \geq 2$. Da wir schon gezeigt haben, dass $\inf(A_1) \leq 2$ ist, muss $\inf(A_1) = 2$ gelten. Da $2 \in A_1$ ist (setze $t = 1$), ist 2 auch das Minimum von A_1.

Wir beweisen, dass 0 das Infimum von A_2 ist und dass A_2 kein Minimum hat. Da für alle $k, m \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} > 0 \tag{4}$$

gilt, ist 0 eine untere Schranke von A_2. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $k, m \in \mathbb{N}$ so dass $k, m > \frac{2}{\varepsilon}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} < \frac{1}{2+\frac{2}{\varepsilon}} + \frac{1}{3+\frac{2}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon+2} + \frac{\varepsilon}{3\varepsilon+2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist ε keine untere Schranke von A_2, und somit gibt es keine grössere untere Schranke als 0. Dies zeigt, dass $\inf(A_2) = 0$. Aus (4) folgt, dass $0 \notin A_2$, und somit hat A_2 kein Minimum.

Das Maximum und das Supremum von A_2 sind $\max A_2 = \sup A_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

1.7. MC Fragen: Intervalle und komplexe Zahlen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Wenn A und B zwei Intervalle in $\mathbb{R}$ sind, dann ist $A \cup B$ auch ein Intervall.

○ Richtig ● Falsch

Lösung: Wir geben ein Gegenbeispiel: Seien $A = [0, 1]$ und $B = [2, 3]$. Dann ist $A \cup B = [0, 1] \cup [2, 3]$ kein Intervall.

(b) Seien $a_0, \ldots, a_4$ reelle Zahlen. Falls $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_4 z^4 + z^5 = 0$$

ist, dann ist $\bar{z}$ auch eine Lösung.

● Richtig ○ Falsch

Lösung: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \bar{a} = a.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 z + \cdots + a_4 z^4 + z^5 = 0 &\iff \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_4 z^4 + z^5} = \bar{0} \\ &\iff \bar{a}_0 + \overline{a_1 z} + \cdots + \overline{a_4 z^4} + \overline{z^5} = \bar{0} \\ &\iff \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z} + \cdots + \bar{a}_4 (\bar{z})^4 + (\bar{z})^5 = \bar{0} \\ &\iff a_0 + a_1 \bar{z} + \cdots + a_4 (\bar{z})^4 + (\bar{z})^5 = 0. \end{aligned}$$

(c) Seien z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen, so dass $|z_1| = |z_2|$. Dann gilt $z_1 = z_2$ oder $z_1 = -z_2$.

○ Richtig ● Falsch

Lösung: Wir geben ein Gegenbeispiel: $z_1 = 1$ und $z_2 = i$. Dann ist $|z_1| = |z_2| = 1$ aber $1 \neq i$ und $1 \neq -i$.

(d) Sei z eine komplexe Zahl. Dann existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $z = ib$ genau dann, wenn $\bar{z} = -z$.

● Richtig ○ Falsch

Lösung: Wir schreiben z in kartesischer Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{z} = -z &\iff \overline{a + ib} = -(a + ib) \iff a - ib = -a - ib \iff a = -a \\ &\iff a = 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\bar{z} = -z$ genau dann, wenn $z = ib$.

1.8. Komplexe Zahlen - Wiederholung. Finden Sie für jede der folgenden komplexen Zahlen z

- ihre kartesische Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$,
- ihren Betrag $|z|$,
- ihre Konjugierte $\bar{z}$,
- ihr Reziprokes $1/z$ (in kartesischer Form):

$$z_1 = -42, \qquad z_2 = -\frac{1}{i}, \qquad z_3 = \frac{1-i}{1+i},$$

$$z_4 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad z_5 = \sin\alpha + i\cos\alpha,$$

$$z_6 = 2022 + i^{2021}, \qquad z_7 = (1+i)^6,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Vielleicht möchten Sie z_7 zuerst in Polarform schreiben.

Bemerkung: Die kartesische Form darf nicht i im Nenner erhalten! Z.B. ist $1+i$ OK, aber $1/(1+i)$ nicht.

Lösung:

- Wir betrachten $z_1 = -42$.
  - kartesische Form: -42;
  - Betrag: 42;
  - Konjugierte: -42;
  - Reziprokes: $-\frac{1}{42}$.
- Wir betrachten $z_2 = -\frac{1}{i}$.
  - kartesische Form: $-\frac{1}{i} = -\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = i$;
  - Betrag: 1;
  - Konjugierte: $-i$;
  - Reziprokes: $-i$.
- Wir betrachten $z_3 = \frac{1-i}{1+i}$.
  - kartesische Form:
  $$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i-1}{1-i^2} = \frac{-2i}{2} = -i;$$
  - Betrag: 1;
  - Konjugierte: i;
  - Reziprokes: $-\frac{1}{i} = i$.
- Wir betrachten $z_4 = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

- kartesische Form: $\cos\alpha + i\sin\alpha$;
- Betrag: $\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$;
- Konjugierte: $\cos\alpha - i\sin\alpha$;
- Reziprokes:

$$\frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

- Wir betrachten $z_5 = \sin\alpha + i\cos\alpha$.
  - kartesische Form: $\sin\alpha + i\cos\alpha$;
  - Betrag: $\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1$;
  - Konjugierte: $\sin\alpha - i\cos\alpha$;
  - Reziprokes:

$$\frac{1}{\sin\alpha + i\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha - i\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha - i\cos\alpha.$$

- Wir betrachten $z_6 = 2022 + i^{2021}$.
  - kartesische Form: Wir benutzen, dass $i^4 = 1$. Dann gilt:

$$2022 + i^{2021} = 2022 + (i^4)^{505} \cdot i = 2022 + i;$$

  - Betrag: $|2022 + i| = \sqrt{2022^2 + 1^2} = \sqrt{4\,088\,485}$;
  - Konjugierte: $2022 - i$;
  - Reziprokes:

$$\frac{1}{2022 + i} = \frac{2022 - i}{2022^2 + 1} = \frac{2022}{2022^2 + 1} - \frac{i}{2022^2 + 1}.$$

- Wir betrachten $z_7 = (1 + i)^6$.
  - kartesische Form: Wir benutzen, dass $1 + i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ für $r = \sqrt{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(1+i)^6 &= (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^6 = r^6\left(\cos(6\varphi) + i\sin(6\varphi)\right) \\ &= 8\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) = -8i;\end{aligned}$$

- Betrag: 8;
- Konjugierte: $8i$;
- Reziprokes: $-\frac{1}{8i} = \frac{1}{8}i$.