4.1. MC Fragen: Reihen und Potenzreihen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in (0,\infty)$. Sei ausserdem ρ' der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} nc_n z^{n-1}$. Welche Aussage trifft zu?

○ $\rho > \rho'$

○ $\rho < \rho'$

● $\rho = \rho'$

○ Es liegen nicht genügend Informationen vor, um dies zu entscheiden.

Lösung: Für die Bestimmung des Konvergenzradius ρ' macht es keinen Unterschied, ob wir $\sum_{n\geq 1} nc_n z^{n-1}$ oder $\sum_{n\geq 1} nc_n z^n$ betrachten. Es gilt nun:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|c_n|} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Also stimmen ρ und ρ' überein. Wir haben in obiger Rechnung folgenden Fakt verwendet:

Fakt: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ eine nach oben beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(A) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k^2$

○ konvergiert nicht notwendigerweise.

○ konvergiert immer, aber konvergiert nicht notwendigerweise absolut.

● konvergiert immer absolut.

○ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(B) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$

○ konvergiert nicht notwendigerweise.

○ konvergiert immer, aber konvergiert nicht notwendigerweise absolut.

● konvergiert immer absolut.

◯ keine der obigen Aussagen trifft zu.

Lösung: Da die Reihen $\sum_{k\geq 1} a_k$ und $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergieren, sind $(a_k)_{k\geq 1}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ Nullfolgen. Insbesondere sind sie beschränkt. Daher existiert $C > 0$, so dass $|a_k|+|b_k| \leq C$ für alle $k \geq 1$. Dann gilt für alle $k \geq 1$, dass

$$|a_k|^2 \leq C|a_k|, \quad |a_k b_k| \leq C|a_k|.$$

Da die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergiert, folgt aus dem Vergleichssatz somit, dass sowohl $\sum_{k\geq 1} a_k^2$ als auch $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$ absolut konvergieren.

(c) Sei $\phi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n\geq 1} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$ für $n \geq 1$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

◯ $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ ist konvergent.

Falsch: "ϕ surjektiv" bedeutet intuitiv, dass unter den b_n alle a_n vorkommen müssen, aber dass wir a_n's öfters benutzen dürfen. Somit können wir das folgende Gegenbeispiel angeben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \dots$$

konvergiert (mit Reihenwert 0), aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+1+(-1)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\dots = \infty,$$

da die harmonische Reihe divergiert.

◯ $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ ist konvergent.

Falsch: "ϕ injektiv" bedeutet intuitiv, dass unter den b_n nicht alle a_n vorkommen müssen, aber dass wir keine a_n's mehr als einmal benutzen dürfen. Somit können wir das folgende Gegenbeispiel angeben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + (-1) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \dots$$

konvergiert (mit Reihenwert 0), aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty,$$

da die harmonische Reihe divergiert.

○ $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ ist konvergent.

Falsch: Mit derselben Überlegung zur Bedeutung der Surjektivität wie oben können wir das folgende Gegenbeispiel angeben:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

ist absolut konvergent (mit Reihenwert 2), aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\dots = \infty.$$

● $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ ist konvergent.

Richtig: Die Folge der b_n ist hier eine Umordnung einer Teilfolge $(a_{l(n)})_{n\geq 1}$. Die absolute Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} a_n$ impliziert die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geq 1} a_{l(n)}$ über die Teilfolge. Nach dem Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen konvergiert also auch $\sum_{n\geq 1} b_n$ absolut.

4.2. Konvergenz von Reihen. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen (d.h. entscheiden Sie in jedem Fall ob die Reihe absolut konvergent, bedingt konvergent, oder divergent ist).

(a) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{3}{2k+2}$

Lösung: Wir stellen fest, dass $\frac{3}{2k+2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{k+1}$. Da die harmonische Reihe divergiert, divergiert auch die vorliegende Reihe.

(b) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{k^2+k+1}{k^5+k^3+1}$

Lösung: Durch Teilen von Zähler und Nenner durch k^2 sehen wir, dass es ein $K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $k \geq K$ gilt, dass $\frac{k^2+k+1}{k^5+k^3+1} \leq \frac{2}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$ ist. Also konvergiert die vorliegende Reihe absolut (Vergleichssatz und Beispiel 2.7.8).

(c) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{5k+2^k}{3^k}$

Lösung: Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\frac{\frac{5(k+1)+2^{k+1}}{3^{k+1}}}{\frac{5k+2^k}{3^k}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{5(k+1)}{2^k}+2}{\frac{5k}{2^k}+1} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3},$$

da gemäss Beispiel 2.2.3 $\lim_{k\to\infty} \frac{5(k+1)}{2^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{5k}{2^k} = 0$. Somit konvergiert die vorliegende Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut.

(d) $\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

Lösung: Es gilt

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

In letzterer Darstellung sieht man direkt, dass die Folge definiert durch

$$a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

nichtnegativ und monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert. Somit konvergiert die vorliegende Reihe nach dem Leibniz-Kriterium. Um zu zeigen, dass sie nicht absolut konvergiert, stellen wir fest, dass $\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1} - 1$, was nach oben unbeschränkt ist.

(e) $\sum_{k\geq 1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} \frac{1}{2^k}$

Lösung: Wir wenden das Wurzelkriterium an:

$$\sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} \frac{1}{2^k}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} \frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{e}{2}$$

gemäss Beispiel 2.2.6. Da $e > 2$ ist, folgt aus dem Wurzelkriterium, dass die vorliegende Reihe divergiert.

4.3. Konvergenzradius. Bestimmen Sie in den folgenden Teilaufgaben (a)–(d) den jeweiligen Konvergenzradius $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$ der gegebenen Potenzreihe und beantworten Sie jeweils die zusätzlichen Fragen rechts.

(a) $\sum_{k\geq 0} z^k$ — Zeigen Sie, dass die Potenzreihe in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho_a$ divergiert.

Lösung: Aus der Formel für den Konvergenzradius folgt direkt $\rho_a = 1$. Für $|z| = 1$ ist die Folge $(|z^k|)_{k\geq 0}$ keine Nullfolge, und daher kann die Potenzreihe für solche $z \in \mathbb{C}$ nicht konvergieren (vgl. MC Frage 3.1(e)).

(b) $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} z^k$ Finden Sie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| = |z_2| = \rho_b$, so dass die Potenzreihe in z_1 konvergiert und in z_2 divergiert.

Lösung: Aus Beispiel 2.2.5 folgt, dass $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$. Somit ist der Konvergenzradius $\rho_b = 1$. Für $z = 1$ divergiert die Potenzreihe, da wir in diesem Punkt die harmonische Reihe erhalten. Für $z = -1$ erhalten wir eine alternierende harmonische Reihe, welche aufgrund des Leibniz-Kriteriums konvergiert.

(c) $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} z^k$ Zeigen Sie, dass die Potenzreihe in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho_c$ absolut konvergiert.

Lösung: Aus Beispiel 2.2.5 folgt wieder, dass $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1$. Somit ist der Konvergenzradius $\rho_c = 1$. Für $|z| = 1$ ist $\left|\frac{1}{k^2} z^k\right| = \frac{1}{k^2}$, sodass die Potenzreihe für solche z gemäss Beispiel 2.7.8 absolut konvergiert.

(d) $\sum_{k\geq 1} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k$ *Hinweis:* Verwenden Sie nicht die Definition des Konvergenzradius, sondern wenden Sie direkt das Quotientenkriterium an.

Lösung: Wie der Hinweis vorschlägt, betrachten wir

$$|a_{k+1}| \cdot \frac{1}{|a_k|} = \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} |z|^{k+1} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2 \cdot |z|^k} = |z| \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = |z| \frac{k+1}{2(2k+1)},$$

was für $k \to \infty$ gegen $\frac{|z|}{4}$ konvergiert. Aus dem Quotientenkriterium folgt, dass die Potenzreihe für $|z| < 4$ absolut konvergiert und für $|z| > 4$ divergiert. Somit ist $\rho_d = 4$.

4.4. Wurzelkriterium vs. Quotientenkriterium. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Folgern Sie, dass falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert, folgende Gleichheit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wie interpretieren Sie die Aussagen in dieser Aufgabe im Zusammenhang mit dem Quotienten- und Wurzelkriterium?

Hinweis: Um eine der Ungleichungen zu beweisen, können Sie mit einer reellen Zahl $q > \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ beginnen, und dann ähnlich wie im Beweis des Quotientenkriteriums zeigen, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$.

Lösung: Die zweite Ungleichung folgt aus der Definition von lim sup und lim inf. Wir zeigen die dritte Ungleichung; der Beweis der ersten Ungleichung ist ähnlich.

Sei

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Falls $\alpha = \infty$ ist, gibt es nichts zu beweisen. Falls α endlich ist, betrachte eine reelle Zahl $q > \alpha$. Es gibt dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$$

für $n \geq N$.

Nach Multiplikation k solcher aufeinanderfolgender Terme erhalten wir:

$$\frac{|a_{N+k}|}{|a_N|} = \frac{|a_{N+k}|}{|a_{N+k-1}|} \cdot \frac{|a_{N+k-1}|}{|a_{N+k-2}|} \cdot \dots \cdot \frac{|a_{N+2}|}{|a_{N+1}|} \cdot \frac{|a_{N+1}|}{|a_N|} \leq q^k.$$

Das heisst, es gilt $|a_n| \leq |a_N| q^{-N} \cdot q^n$ für $n \geq N$. Deshalb gilt für $n \geq N$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_N| q^{-N}} \cdot q,$$

sodass, nach Übung 2.2 in Serie 2,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq q. \tag{1}$$

Die Ungleichung (1) gilt für jedes $q > \alpha$, und deshalb gilt auch

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Falls $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert, gilt gemäss Lemma 2.4.1 in allen Ungleichungen in der Aufgabenstellung Gleichheit. Somit existiert in diesem Fall auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und hat denselben Wert.

Im Zusammenhang mit dem Wurzel- bzw. Quotientenkriterium bedeuten die Aussagen in dieser Aufgabe Folgendes: Das Wurzelkriterium kann die Konvergenz einer Reihe beweisen, auch wenn das Quotientenkriterium diesen Schluss nicht erlaubt. In der Tat ist dies der Fall, wenn

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 < \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

gilt. In der Vorlesung haben wir ein Beispiel gesehen, in dem dieser Fall tatsächlich eintritt. Der umgekehrte Fall kann nicht eintreten: Wenn das Wurzelkriterium keinen Schluss erlaubt, also wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, dann erlaubt auch das Quotientenkriterium keinen Schluss, weil dann aus den Ungleichungen in dieser Aufgabe

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

folgt. Wenn allerdings bei der Anwendung des Quotientenkriteriums der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert (also der tatsächliche Grenzwert, und nicht nur der Limes superior/inferior), dann ist das Wurzelkriterium "gleich stark" wie das Quotientenkriterium.

4.5. b-adische Brüche. Lesen Sie über *b-adische Brüche* im Buch von Königsberger (im Abschnitt 6.2.I, LINK). Stellen Sie die folgenden Zahlen als Dualbruch und als Dezimalbruch dar:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}.$$

Welche der Entwicklungen sind endlich?

Lösung: Als Dezimalbrüche finden wir die folgenden Darstellungen:

$$\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}, \qquad \text{da } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}}_{=10/9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4} = 0.25000\ldots = 0.25, \qquad \text{da } \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} = 0.2000\ldots = 0.2, \qquad \text{da } \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Andererseits, als Dualbrüche:

$$\frac{1}{3} = 0.010101\ldots = 0.\overline{01}, \qquad \text{da } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{0}{2^{2k-1}} + \frac{1}{2^{2k}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}}_{=4/3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4} = 0.01000\ldots = 0.01, \qquad \text{da } \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} = 0.00110011\ldots = 0.\overline{0011}, \qquad \text{da } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{0}{2^{4k-3}} + \frac{0}{2^{4k-2}} + \frac{1}{2^{4k-1}} + \frac{1}{2^{4k}}\right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}}_{=16/15} + \frac{1}{16} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}}_{=16/15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Wir stellen fest, dass für 1/4 sowohl der Dezimalbruch als auch der Dualbruch endlich ist. Für 1/3 ist sowohl der Dezimalbruch als auch der Dualbruch unendlich (periodisch). Für 1/5 ist der Dezimalbruch endlich, während der Dualbruch unendlich ist (periodisch).

Allgemein gilt, dass für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Darstellung von $1/n$ als b-adischer Bruch endlich ist, wenn $k, m \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\frac{1}{n} = \frac{m}{b^k}$$

gilt. Dies gilt genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $n \mid b^k$.

4.6. Vertauschen von Limes und unendlicher Summation. Lesen Sie die Aussage von Satz 2.7.28 im Skript.

(a) Definiere für $j, n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(j) := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = n, \\ 0, & \text{falls } j \neq n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert, dass aber

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

gilt. Wieso ist Satz 2.7.28 hier nicht anwendbar?

Lösung: Für jedes $j \in \mathbb{N}$ und alle $n > j$ haben wir $f_n(j) = 0$, also existiert der Grenzwert $f(j) = \lim_{n\to\infty} f_n(j) = 0$, was zu $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = 0$ führt. Andererseits haben wir für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = 1$ ist, und daher $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = 1$.

Satz 2.7.28 kann in diesem Fall nicht angewendet werden, da Bedingung (2) nicht erfüllt werden kann: Wegen Teil 2.1 der Bedingung müsste $g(j) \geq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gelten, sodass $\sum_{j=0}^{\infty} g(j) = \infty$ folgt und Teil 2.2 der Bedingung nicht erfüllt sein kann.

(b) Beweisen Sie Satz 2.7.28.

Hinweis: Wählen Sie für $\varepsilon > 0$ zuerst $J \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{j=J}^{\infty} g(j) < \frac{\varepsilon}{4}$. Für hinreichend grosse n sind die Abstände zwischen $f_n(j)$ und $f(j)$ für alle $0 \leq j < J$ klein.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Wir folgen dem Hinweis und wählen $J \in \mathbb{N}^*$, so dass $\sum_{j=J}^{\infty} g(j) < \frac{\varepsilon}{4}$, was möglich ist, da die Reihe $\sum_{j\geq 0} g(j)$ konvergiert. Da für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$\lim_{n\to\infty} f_n(j) = f(j)$ gibt es $N(0), \ldots, N(J-1) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $0 \le j < J$ folgendes gilt:

$$\forall n \ge N(j) \colon |f_n(j) - f(j)| < \frac{\varepsilon}{2J}.$$

Wir definieren $N := \max\{N(j) \mid 0 \le j < J\}$. Dann gilt für alle $n \ge N$, dass

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) - \sum_{j=0}^{\infty} f(j)\right| &\le \sum_{j=0}^{J-1} \underbrace{|f_n(j) - f(j)|}_{<\varepsilon/(2J)} + \sum_{j=J}^{\infty} (\underbrace{|f_n(j)|}_{\le g(j)} + \underbrace{|f(j)|}_{\le g(j)}) \\
&< J \cdot \frac{\varepsilon}{2J} + 2 \cdot \underbrace{\sum_{j=J}^{\infty} g(j)}_{<\varepsilon/4} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt gemäss Definition der Konvergenz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j) = \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$$

und der Satz ist bewiesen.