5.1. MC Fragen: Doppelte Summation, monotone Funktionen, Stetigkeit.
Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ eine reelle Doppelfolge. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\right)?$$

○ Keine Bedingung ist erforderlich. Diese Gleichung ist immer wahr.

○ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $|a_{m,n}| \leq C$ für alle $m, n \geq 0$.

○ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n} \leq C$ für alle $M, N \geq 0$.

● Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}|a_{m,n}| \leq C$ für alle $M, N \geq 0$.

Lösung: Das Beispiel auf Seite 37 im Skript ist ein Gegenbeispiel für die ersten drei Antwortmöglichkeiten ($a_{m,m} = 1$ und $a_{m,m+1} = -1$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $a_{m,n} = 0$ wenn $n \notin \{m, m+1\}$). Dass die vierte Bedingung hinreichend ist, folgt aus dem Doppelreihensatz (Satz 2.7.23).

(b) Welche der folgenden Implikationen ist immer wahr?

○ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\implies$ f monoton.

Falsch: Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - 1/2|$ ist zwar beschränkt, aber nicht monoton.

○ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend $\implies$ f stetig.

Falsch: Die Funktion kann trotzdem einen unstetigen "Sprung" haben:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in [0, 1/2], \\ x+1, & \text{wenn } x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

○ $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

Falsch: Zum Beispiel ist $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ monoton fallend, aber unbeschränkt.

● $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

Richtig: Angenommen f ist monoton steigend (der Fall "monoton fallend" ist analog). Dann gilt $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ für alle $x \in [0,1]$, das heisst

$$f(x) \in [f(0), f(1)], \quad \forall x \in [0,1],$$

was Beschränktheit von f zeigt.

(c) Welche der folgenden Bedingungen impliziert *nicht*, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist?

○ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Falsch: Diese Bedingung impliziert die Stetigkeit. In der Tat, wenn $C = 0$, dann ist f konstant, und sonst wähle in der Definition der Stetigkeit $\delta = \varepsilon/C$.

● Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \geq 1$.

Richtig: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $C = 1$, $f(x) = 0$ wenn $x < 0$ und $f(x) = 1$ wenn $x \geq 0$. Diese Funktion ist unstetig in $x_0 = 0$, jedoch gilt $|f(x) - f(y)| \leq 1 \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \geq 1$.

○ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq 1$.

Falsch: Diese Bedingung impliziert die Stetigkeit. In der Tat, wenn $C = 0$, dann ist f konstant, und sonst wähle in der Definition der Stetigkeit $\delta = \min\left\{\sqrt{\varepsilon/C}, 1\right\}$.

(d) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Es gibt $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x_0) = 0$.

○ Wenn $(x_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Folge ist, die $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 2$ erfüllt, dann gilt die Gleichung

$$f(2) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n).$$

● Es gilt $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Lösung: Die konstante Funktion $f = 1$ ist ein Gegenbeispiel für die ersten beiden Antwortmöglichkeiten. Dass die dritte Antwortmöglichkeit richtig ist, folgt aus dem Satz über Folgenstetigkeit (Satz 3.2.4).

(e) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Jede bijektive Funktion $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ ist monoton.

Falsch: Ein Gegenbeispiel ist

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x \in [0, 1/2), \\ 3/2 - x, & \text{wenn } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

- ◯ Es gibt eine injektive stetige Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, die nicht monoton ist.

  Falsch: Wenn f die angegebenen Eigenschaften hat, aber nicht monoton steigend wäre, dann gäbe es $0 < x < y < 1$ mit $f(x) > f(y)$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt nun, dass es $z_1 \in (0, x)$ und $z_2 \in (x, y)$ gibt mit $f(z_1) = f(z_2) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Dies widerspricht der Injektivität.

- ● Jede stetige Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ ist surjektiv, wenn $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

  Richtig: Dies folgt direkt aus dem Zwischenwertsatz.

5.2. Cauchy Produkt. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Lösung: Falls $|x| < 1$, wissen wir, dass $\sum_{n\geq 0} x^n$ absolut konvergiert und

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Nach dem Satz über Cauchy-Produkte (Satz 2.7.26) gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\cdot\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}x^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.\end{aligned}$$

5.3. Stetigkeit I. Finden Sie Werte $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b, & \text{wenn } x \leq -1,\\ (a+b)x, & \text{wenn } -1 < x < 1,\\ x^2 + ax - b, & \text{wenn } x \geq 1,\end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

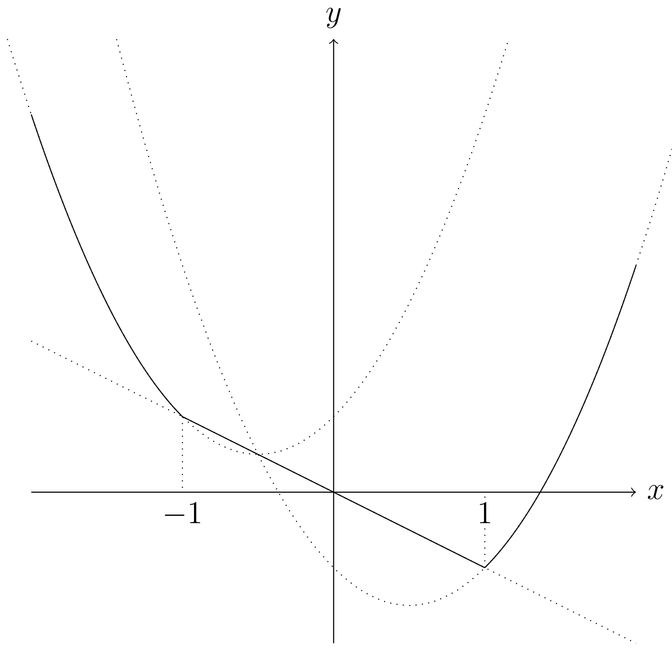
Lösung: Die polynomialen Funktionen

$$f_1(x) = x^2 - ax + b, \quad f_2(x) = (a+b)x, \quad f_3(x) = x^2 + ax - b,$$

sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$ (Korollar 3.2.7) für beliebige Werte von $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion f ist das Resultat des "Zusammenklebens" von f_1 und f_2 in -1 und von f_2 und f_3 in 1. Somit ist f stetig, wenn a, b so gewählt sind, dass $f_1(-1) = f_2(-1)$ und $f_2(1) = f_3(1)$. Nun ist

$$\begin{aligned} f_1(-1) = f_2(-1) \text{ und } f_2(1) = f_3(1) &\iff \begin{cases} 1 + a + b = -a - b, \\ a + b = 1 + a - b, \end{cases} \\ &\iff a = -1, b = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Hier ist eine Skizze der Funktion f. Gepunktet sind die Funktionen f_1, f_2 und f_3.



5.4. Stetigkeit II. Sei $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $|f(x) - f(y)| \le |x - y|$ für alle $x, y \ge 0$.

Lösung: Es gilt für alle $x, y \ge 0$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| = |\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}| &= \left| (\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}) \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} \right| \\ &= \left| \frac{(x+1) - (y+1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} \right| = \frac{|x-y|}{|\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}|} \le |x - y|. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass f in einem Punkt $x_0 \in [0, \infty)$ stetig ist, genügt es nun, $\delta = \varepsilon$ in der Definition der Stetigkeit zu wählen. Denn für alle $x \in [0, \infty)$ mit $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$ folgt aus der obigen Ungleichung, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \varepsilon.$$

5.5. Stetigkeit III. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nur in $x_0 = \frac{1}{2}$ stetig ist und in allen anderen Punkten von $\mathbb{R}$ unstetig ist.

Lösung: Zuerst zeigen wir, dass f in $x_0 = \frac{1}{2}$ stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir nehmen $\delta = \varepsilon$. Sei $x \in (1/2 - \delta, 1/2 + \delta)$. Wenn $x \in \mathbb{Q}$, dann haben wir

$$|f(x) - f(1/2)| = |x - 1/2| < \delta = \varepsilon,$$

und wenn $x \notin \mathbb{Q}$, dann gilt

$$|f(x) - f(1/2)| = |1 - x - 1/2| = |1/2 - x| = |x - 1/2| < \delta = \varepsilon.$$

Somit ist f in $x_0 = \frac{1}{2}$ stetig.

Jetzt zeigen wir, dass f in allen anderen Punkten $x_0 \neq \frac{1}{2}$ nicht stetig ist. Nach Satz 3.2.4. genügt es eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ zu finden, die gegen x_0 konvergiert und für welche $(f(a_n))_{n \geq 1}$ nicht gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Nehmen wir zuerst an, dass $x_0 \neq \frac{1}{2}$ in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt. Dann ist $f(x_0) = 1 - x_0$. Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen, so dass $x_0 \leq a_n \leq x_0 + \frac{1}{n}$. Solche rationalen Zahlen existieren aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ gegen x_0 und $f(a_n) = a_n$ für alle $n \geq 1$. Deshalb ist

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \neq 1 - x_0 = f(x_0).$$

Nehmen wir nun an, dass $x_0 \neq \frac{1}{2}$ in Q liegt. Dann ist $f(x_0) = x_0$. Sei $(b_n)_{n \geq 1}$ nun eine Folge irrationaler Zahlen, so dass $x_0 \leq b_n \leq x_0 + \frac{1}{n}$. Solche irrationalen Zahlen existieren aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ (welche z.B. daraus folgt, dass jedes Intervall der Form (a, b) für $a < b$ überabzählbar ist, während $\mathbb{Q}$ abzählbar ist). Dann konvergiert $(b_n)_{n \geq 1}$ gegen x_0 und $f(b_n) = 1 - b_n$ für alle $n \geq 1$. Deshalb ist

$$\lim_{n \to \infty} f(b_n) = \lim_{n \to \infty} (1 - b_n) = 1 - x_0 \neq x_0 = f(x_0).$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.

5.6. Stetigkeit IV. Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $x_0 \in D$ ein Punkt mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\inf\Big\{f(x) \mid x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\Big\} > 0.$$

Lösung: Da f in x_0 stetig ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ die Implikation

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Es folgt, dass

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

Es genügt nun, in Obigem $\varepsilon = f(x_0)/2$ zu wählen. Für das zugehörige $\delta > 0$ gilt dann, dass

$$|x - x_0| < \delta \implies f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Hieraus folgt

$$\inf\Big\{f(x) \mid x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\Big\} \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

5.7. Gegenbeispiele zum Zwischenwertsatz.

(a) Sei $D = [0,1] \cup [2,3]$. Finden Sie eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $a, b \in D$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$, so dass *kein* $z \in D$ existiert mit $f(z) = c$.

Lösung: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist stetig und erfüllt die Anforderungen, beispielsweise durch die Wahl von $a = 1$, $b = 2$ und $c = \frac{3}{2}$.

(b) Finden Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$, so dass *kein* $z \in \mathbb{Q}$ existiert mit $f(z) = c$.

Lösung: Wir zeigen, dass die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2$ die Anforderungen erfüllt. Es handelt sich hierbei um eine Polynomfunktion, welche stetig ist. (In der Tat, dies folgt z.B. aus der Stetigkeit von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ unter Verwendung der Definition der Stetigkeit mit $D = \mathbb{Q}$ oder auch aus einer Anwendung von Satz 3.2.4 mit $D = \mathbb{Q}$.) Nun wählen wir $a = 0$, $b = 2$ und $c = 2$. Dann gilt $f(a) = 0 < 2 = c < 4 = f(b)$. Es gibt allerdings kein $z \in \mathbb{Q}$ mit $f(z) = c = 2$, da die Wurzel aus 2 irrational ist.

5.8. Existenz eines Fixpunkts. Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in [0,1]$ gibt, so dass $f(x_0) = x_0$.

Lösung: Wir definieren die Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x) - x$ für alle $x \in [0,1]$. Dann ist g aufgrund von Korollar 3.2.5 eine stetige Funktion. Aus $f(x) \in [0,1]$ für alle $x \in [0,1]$ folgt

$$g(0) = f(0) - 0 \geq 0, \quad g(1) = f(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt nun, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, so dass $g(x_0) = 0$. Aufgrund der Definition von g ist dies äquivalent zu $f(x_0) = x_0$.