6.1. MC Fragen: Stetige Funktionen, Konvergenz von Funktionenfolgen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- ○ Wenn $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [0,1]$, dann gibt es $N \geq 1$, so dass $f(x) \geq 1/N$ für alle $x \in [0,1]$.

  Falsch: Die konstante Funktion $f(x) = -1$ ist ein Gegenbeispiel.

- ○ Wenn $f(0) = 1/2$ und $f(1) = 1/4$, dann gibt es $x \in (0,1)$, so dass $f(x) < 1/4$.

  Falsch: Die Funktion $f(x) = 1/2 - x/4$ ist ein Gegenbeispiel.

- ● Wenn $f(0) < 1$ und $f(1) > e$, dann gibt es $x \in [0,1]$, so dass $f(x) = e^x$.

  Richtig: Die Funktion $g(x) = f(x) - e^x$ ist stetig und erfüllt $g(0) = f(0) - 1 < 0$ und $g(1) = f(1) - e > 0$. Somit gibt es ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$, was zu $f(x) = e^x$ äquivalent ist.

(b) Sei $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ eine beliebige Funktion.

- ○ Wenn f bijektiv ist, dann ist f monoton.

  Falsch: Da $[0,1]$ und $[0,\infty)$ dieselbe Kardinalität haben, existiert eine Bijektion f zwischen diesen Mengen. Ein Beispiel einer solchen Bijektion $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ kann man wie folgt konstruieren: Sei $g(x) = \frac{x}{1-x}$ für $x \in [0,1)$ und definiere

  $$f(x) = \begin{cases} g(2^{-n-1}), & \text{falls } x = 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ g(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Allerdings kann eine monotone Abbildung $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ niemals surjektiv (also auch nicht bijektiv) sein, da aus der Monotonie folgt, dass alle Funktionswerte $f(x)$ für $x \in [0,1]$ zwischen $f(0)$ und $f(1)$ liegen.

- ● Wenn f stetig ist, dann ist f nicht bijektiv.

  Richtig: Aus dem Min-Max-Satz (Satz 3.4.5) folgt, dass jede stetige Funktion definiert auf $[0,1]$ beschränkt sein muss. Insbesondere kann eine solche Funktion nicht $[0,\infty)$ als Bildmenge haben.

- ○ Wenn f monoton ist, dann ist f stetig.

  Falsch: Die Funktion f definiert durch $f(x) = x$ wenn $x \in [0,1/2)$, $f(x) = x+1$ wenn $x \in [1/2,1]$ ist ein Gegenbeispiel, denn sie ist (streng) monoton steigend, aber unstetig im Punkt $1/2$.

(c) Seien $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

● Wenn f_n stetig ist für alle geraden $n \geq 2$, dann ist f stetig.

Richtig: Die Funktionenfolge $(f_{2n})_{n\geq 1}$ besteht aus stetigen Funktionen und konvergiert in $\mathbb{R}$ gleichmässig gegen f. Somit ist f aufgrund von Satz 3.7.4 stetig.

○ Die Funktionfolge $(f_n^2)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig.

Falsch: Wir betrachten als Gegenbeispiel $f_n(x) = x + 1/n$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ gleichmässig gegen $f(x) = x$, da $|f_n(x) - f(x)| = 1/n$ für alle $n \geq 1$ und alle $x \in \mathbb{R}$. Die "quadrierte Funktionenfolge" $f_n^2(x) = (x + 1/n)^2$ konvergiert in $\mathbb{R}$ punktweise gegen $f^2(x) = x^2$. Allerdings ist $|f_n^2(n) - f^2(n)| = (n + 1/n)^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 \geq 2$ für alle $n \geq 1$. Somit gibt es kein n, so dass $|f_n^2(x) - f^2(x)| < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass $(f_n^2)_{n\geq 1}$ nicht gleichmässig (in $\mathbb{R}$) konvergiert.

○ Wenn f_n streng monoton wachsend ist für alle n, dann ist f streng monoton wachsend.

Falsch: Um ein Gegenbeispiel anzugeben, definieren wir $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist g streng monoton wachsend und $|g(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen $f_n(x) = g(x)/n$. Dann ist für alle n die Funktion $f_n(x)$ streng monoton wachsend, und $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ gleichmässig gegen die konstante Funktion $f(x) = 0$, welche nicht streng monoton wachsend ist.

○ Wenn f stetig ist, dann ist mindestens eine der Funktionen f_n stetig.

Falsch: Ein Gegenbeispiel ist die Funktionenfolge der unstetigen Funktionen gegeben durch $f_n(x) = 1/n$ wenn $x \leq 0$ und $f_n(x) = -1/n$ wenn $x > 0$. Diese konvergiert gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen die konstante Funktion $f(x) = 0$.

(d) Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch

$$f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\sqrt{x} + n^{-1})^2.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

○ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x + 2\sqrt{x}$ für alle $x \in [0,\infty)$

Falsch: Es gilt $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x} + n^{-1})^2 = \left(\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x} + n^{-1})\right)^2 = (\sqrt{x})^2 = x \neq x + 2\sqrt{x}$ falls $x > 0$.

○ Es gibt $M > 0$, so dass die Folge der Funktionen $f_n|_{[M,\infty)} \colon [M,\infty) \to \mathbb{R}$ gleichmässig in $[M,\infty)$ konvergiert.

Falsch: Die Funktionenfolge konvergiert punktweise in $[0,\infty)$ gegen die Funktion $f(x) = x$. Es gilt jedoch $|f_n(x) - f(x)| = \frac{2\sqrt{x}}{n} + \frac{1}{n^2}$ und deshalb $|f_n(n^2) - f(n^2)| = 2 + \frac{1}{n^2}$. Somit liegt auf keinem Intervall der Form $[M,\infty)$ gleichmässige Konvergenz vor.

● Für alle $M > 0$ konvergiert die Folge der Funktionen $f_n|_{[0,M]} \colon [0,M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig in $[0,M]$.

Richtig: Die Funktionenfolge konvergiert punktweise in $[0,\infty)$ gegen die Funktion $f(x) = x$. Für alle $x \in [0,M]$ gilt $|f_n(x) - x| = \frac{2\sqrt{x}}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2\sqrt{M}}{n} + \frac{1}{n^2}$. Da $\frac{2\sqrt{M}}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt hieraus, dass $(f_n|_{[0,M]})$ gleichmässig gegen $f|_{[0,M]}$ konvergiert.

6.2. Stetigkeit. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $f \colon D \to \mathbb{R}$ stetig sind.

(a) $D = \mathbb{R}$, $\qquad f(x) = \exp(\exp(x^3 - 2))$

Lösung: Die Funktionen $x \mapsto x^3 - 2$ und $x \mapsto \exp(x)$ sind stetig in $D = \mathbb{R}$ (Korollar 3.2.7 und Satz 3.6.1). Mit zweimaliger Anwendung von Satz 3.5.1 folgt, dass $f(x) = \exp(\exp(x^3 - 2))$ stetig in $D = \mathbb{R}$ ist.

(b) $D = (0,\infty)$, $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\exp(x^2) + 1}$

Lösung: Aus Korollar 3.2.8 folgt, dass $x \mapsto \frac{1}{x}$ in $D = (0,\infty)$ stetig ist. Wie in (a) sieht man, dass $x \mapsto \exp(x^2)$ stetig ist (in $\mathbb{R}$). Aus Satz 3.2.5(1) folgt dann, dass $x \mapsto \exp(x^2) + 1$ stetig ist (in $\mathbb{R}$). Wegen Satz 3.6.1 ist $\exp(x^2) + 1 > 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit hat diese Funktion keine Nullstellen in $\mathbb{R}$. Aus Satz 3.2.5(2) folgt daher, dass $x \mapsto \frac{1}{\exp(x^2)+1}$ stetig ist (in $\mathbb{R}$). Letztlich können wir Satz 3.2.5(1) noch einmal mit $D = (0,\infty)$ anwenden und erhalten, dass die gegebene Funktion f stetig in $D = (0,\infty)$ ist.

6.3. Grenzwerte. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)}$

Lösung: Sei $a_n = \frac{n^3+2}{n^3-6}$ für alle $n \geq 2$. Diese Folge ist wohldefiniert, weil $n^3 - 6 > 0$ für alle $n \geq 2$. Für diese Folge gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2}{n^3-6} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{8}{n^3-6}\right) = 1.$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion (Satz 3.6.1) und dem Satz über Folgenstetigkeit (Satz 3.2.4) folgt nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)} = \lim_{n\to\infty} e^{a_n} = e^1 = e.$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)}+3}$

Lösung: Wir definieren die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{1/(1+x^2)}+3}, \quad (x \in \mathbb{R})$$

sodass

$$f(1/n) = \frac{e^{1/n}}{e^{1/(1+1/n^2)}+3} = \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)}+3}$$

für alle $n \geq 1$. Mit ähnlichen Argumenten wie in Aufgabe 6.2 sehen wir, dass f stetig ist (in $\mathbb{R}$). Mit Satz 3.2.4 über Folgenstetigkeit finden wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)}+3} = \lim_{n\to\infty} f(1/n) = f(0) = \frac{1}{e+3}.$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\Big(n^{\frac{1}{\ln(n)}} + \dfrac{1}{n}\Big)$

Lösung: Gemäss Definition ist $n^{\frac{1}{\ln(n)}} = \exp\Big(\frac{1}{\ln(n)} \cdot \ln(n)\Big) = \exp(1) = e$ für $n \geq 1$. Nun, da wir wissen, dass der natürliche Logarithmus stetig in $(0, \infty)$ ist (Korollar 3.6.5), können wir mit dem Satz 3.2.4 über Folgenstetigkeit wieder schliessen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \ln\Big(n^{\frac{1}{\ln(n)}} + \frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \ln\Big(e + \frac{1}{n}\Big) = \ln\Big(\lim_{n\to\infty} \Big(e + \frac{1}{n}\Big)\Big) = \ln(e) = 1.$$

6.4. Existenz von Lösungen. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen je mindestens eine reelle Lösung im angegebenen Bereich D haben. Finden Sie für jede Gleichung ein beschränktes Intervall $I \subset D$, in dem die Lösung liegt.

(a) $x^4 - x - 12 = 0, \qquad D = (-\infty, 0)$

Lösung: Die Funktion $x^4 - x - 12$ ist stetig in $\mathbb{R}$ und es gilt

$$(-2)^4 - (-2) - 12 = 6 > 0, \quad (-1)^4 - (-1) - 12 = 2 - 12 = -10 < 0,$$

woraus mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass die Gleichung eine Lösung im Intervall $I = (-2, -1)$ hat.

(b) $x^x - 2x = 0, \qquad D = (1, \infty)$

Lösung: Der Wert $x = 2$ erfüllt die Gleichung $x^x - 2x = 0$.

(c) $xe^x = 1, \qquad D = (0, 1)$

Lösung: Sei $g(x) = xe^x - 1$. Diese Funktion ist stetig in $\mathbb{R}$. Da $g(0) = 0 - 1 = -1 < 0$ und $g(1) = e - 1 > 0$, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass g eine Nullstelle in $I = (0, 1)$ und somit die gegebene Gleichung eine Lösung in diesem Intervall I hat.

(d) $e^x = \sqrt{x} + 2, \qquad D = (0, \infty)$

Lösung: Sei $g(x) = e^x - \sqrt{x} - 2$. Die Funktion g ist stetig in D. Aus $e \approx 2.71 < 3$ und $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \geq 0$ folgt

$$g(1) = e - 1 - 2 < 0, \quad g(4) = e^4 - \sqrt{4} - 2 \geq 5 - \sqrt{4} - 2 = 1 > 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt, dass g eine Nullstelle in $I = (1, 4)$ und somit die gegebene Gleichung eine Lösung in diesem Intervall I hat.

6.5. Umkehrfunktionen. Analysieren Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf strikte Monotonie, und falls möglich, bestimmen Sie die inverse Funktion.

(a) $D = (-7, \infty), \qquad f(x) = 4 \cdot \ln(x + 7) + 3$

Lösung: Strikte Monotonie von f folgt aus der strikten Monotonie von ln und die Bildmenge ist $f(D) = \mathbb{R}$, da $\ln\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ surjektiv ist. Somit existiert die inverse Funktion $g\colon \mathbb{R} \to (-7, \infty)$. Wir berechnen diese, indem wir in der Gleichung $y = 4 \cdot \ln(x + 7) + 3$ das x freistellen:

$$\exp(y) = (x + 7)^4 \cdot \exp(3) \implies x = \sqrt[4]{\exp(-3) \cdot \exp(y)} - 7 = \exp\left(\frac{y - 3}{4}\right) - 7.$$

Also ist die Inverse von f gegeben durch

$$g(y) = \exp\left(\frac{y - 3}{4}\right) - 7$$

für $y \in \mathbb{R}$.

(b) $D = \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Lösung: Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend und $x \mapsto e^{-x}$ ist streng monoton fallend. Insbesondere ist $x \mapsto -e^{-x}$ streng monoton wachsend. Es folgt, dass f streng monoton wachsend ist. Nach Satz 3.6.1 und Korollar 3.2.5 ist f des Weiteren stetig. Im Beweis von Satz 3.6.1 haben wir auch gesehen, dass $\lim_{n\to\infty} e^n = \infty$ und

$\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ gilt. Daraus folgt $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} f(-n) = -\infty$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt hieraus, dass die Bildmenge $f(D) = \mathbb{R}$ ist. Somit existiert die inverse Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um diese explizit zu bestimmen, wollen wir wieder $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach x auflösen. Hierfür definieren wir $z = e^x$. Dann ist die aufzulösende Gleichung in der neuen Variablen z:

$$y = \frac{z - \frac{1}{z}}{2} \iff z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Falls wir letztere quadratische Gleichung nach z lösen können, dann können wir x erhalten, indem wir ln auf $z = e^x$ anwenden. Wir berechnen mit der quadratischen Lösungsformel:

$$z_1 = \frac{2y + \sqrt{4y^2+4}}{2} = y + \sqrt{y^2+1},\ z_2 = \frac{2y - \sqrt{4y^2+4}}{2} = y - \sqrt{y^2+1}.$$

Aus $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = |y|$ folgt, dass $z_1 > 0$ und $z_2 < 0$. Wegen $z = e^x > 0$ kommt die Lösung z_2 also nicht in Frage. Also betrachten wir nur z_1 und nehmen den natürlichen Logarithmus:

$$x = \ln\Big(y + \sqrt{y^2+1}\Big).$$

Also ist die inverse Funktion g von f gegeben durch $g(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ für $y \in \mathbb{R}$.

(c) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = e^{-x^2}$

Lösung: Die Funktion erfüllt $f(-x) = f(x)$ und ist somit symmetrisch bezüglich der y-Achse. Insbesondere kann f nicht injektiv sein (z.B. $f(2) = f(-2)$) und damit ist f nicht strikt monoton und es existiert keine inverse Funktion.

6.6. Gleichmässige Konvergenz. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionenfolgen in $D = [0,1]$ gleichmässig konvergent sind. Bestimmen Sie jeweils die Grenzfunktion.

(a) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2} + x + 1$

Lösung: Die Funktionfolge $f_n(x) = x/n^2 + x + 1$ konvergiert punktweise gegen $f(x) = x + 1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n^2} + x + 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n^2}\right) + x + 1 = x + 1.$$

Wir zeigen, dass f_n gleichmässig in $[0,1]$ gegen f konvergiert. Gegeben $\varepsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $N > \varepsilon^{-1/2}$. Dann gilt für alle $n \geq N$ und alle $x \in [0,1]$, dass

$$|f_n(x) - f(x)| = |x/n^2 + x + 1 - (x+1)| = |x/n^2| \leq 1/n^2 \leq 1/N^2 < \varepsilon.$$

(b) $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{kx}}{k!}$

Lösung: Sei $g_k(x) = \frac{e^{kx}}{k!}$. Dann ist

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} g_k(x).$$

Wir wollen Satz 3.7.9 anwenden. Hierfür müssen wir eine konvergente Reihe $\sum_{k\geq 1} c_k$ von nichtnegativen reellen Zahlen finden, so dass für alle $x \in [0,1]$ und $k \geq 1$ gilt, dass $|g_k(x)| \leq c_k$. Diese Reihe finden wir, indem wir die Positivität und Monotonie der Exponentialfunktion verwenden:

$$\sup\Big\{|g_k(x)| \mid x \in [0,1]\Big\} = \sup\left\{\left|\frac{e^{kx}}{k!}\right| \mid x \in [0,1]\right\} = \sup\left\{\frac{e^{kx}}{k!} \mid x \in [0,1]\right\} = \frac{e^k}{k!} =: c_k.$$

Die Reihe über die c_k konvergiert, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} = e^e - 1.$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ aufgrund von Satz 3.7.9 in $[0,1]$ gleichmässig gegen die punktweise Grenzfunktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \exp(e^x) - 1 = e^{e^x} - 1.$$

6.7. Punktweise vs. gleichmässige Konvergenz. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ sei gegeben durch

$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1+n^2x^2}{(1+nx)^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge in $[0,\infty)$ punktweise gegen die konstante Funktion $f(x) = 1$ konvergiert.

Lösung: Sei $x > 0$ beliebig. Dann gilt für $n \geq 1$

$$f_n(x) = \frac{1+n^2x^2}{(1+nx)^2} = \frac{1+n^2x^2}{1+2nx+n^2x^2} = \frac{\frac{1}{n^2}+x^2}{\frac{1}{n^2}+\frac{2x}{n}+x^2}.$$

Für $n \to \infty$ ist aus letzterer Darstellung ersichtlich (vgl. Satz 2.1.8), dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1$. Für $x = 0$ ist $f_n(0) = 1$ für alle $n \geq 1$, sodass auch in diesem Fall die Konvergenz gegen $f(0) = 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz *nicht* gleichmässig in $[0, \infty)$ ist.

Lösung: Wir setzen $x = \frac{1}{n}$ in f_n ein und sehen, dass

$$f_n(1/n) = \frac{1+1}{(1+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Wenn wir $\varepsilon = 1/2$ setzen, dann gibt es also für alle $n \geq 1$ ein $x_n \in [0, \infty)$ (nämlich $x_n = 1/n$), so dass

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |f_n(1/n) - 1| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon.$$

Somit kann es für dieses ε kein $N \in \mathbb{N}$ geben, so dass für alle $n \geq N$ und alle $x \in [0, \infty)$ gilt, dass $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Damit ist gezeigt, dass $(f_n)_{n \geq 1}$ nicht gleichmässig in $[0, \infty)$ gegen $f(x) = 1$ konvergiert.