8.1. MC Fragen: Grenzwerte von Funktionen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Welche der folgenden Aussagen folgt daraus?

○ $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$ existiert

Falsch: Ein Gegenbeispiel erhält man durch $f(x) = x + \sin(x)$ und $g(x) = x$, da der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ nicht existiert.

● $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x) - g(x)) = \infty$

Richtig: Es gilt $f(x)g(x) - g(x) = (f(x) - 1)g(x)$. Aus $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ folgt auch $\lim_{x\to\infty}(f(x) - 1) = \infty$. Daraus folgt dann $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty}((f(x) - 1)g(x)) = \infty$.

○ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Falsch: Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = 2x$ und $g(x) = x$.

○ $\lim_{x\to\infty} f(g(x))$ existiert nicht

Falsch: Es muss sogar gelten, dass $\lim_{x\to\infty} f(g(x)) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt *nicht*?

○ Es existiert kein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$.

Falsch: Die Aussage ist wahr. Wenn f monoton steigend ist, dann gilt für alle $x \le x_0 + 1$ die Ungleichung $f(x) \le f(x_0 + 1)$. Somit ist f auf $(-\infty, x_0 + 1]$ nach oben beschränkt und kann daher bei x_0 nicht gegen ∞ streben.

○ Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

Falsch: Die Aussage ist wahr. In der Tat gelten

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) \mid x > x_0\},$$
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x < x_0\}.$$

Wir beweisen die erste Gleichung und überlassen die zweite zur Übung. Sei $(a_n)_{n\ge1}$ eine Folge, die von oben gegen x_0 konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ so dass $f(x_0 + \delta) < \inf\{f(x) \mid x > x_0\} + \varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in (x_0, x_0 + \delta]$ aufgrund der Monotonie von f, dass

$$\inf\{f(x) \mid x > x_0\} \le f(x) \le f(x_0 + \delta) < \inf\{f(x) \mid x > x_0\} + \varepsilon.$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_0 < a_n < x_0 + \delta$ für alle $n \geq N$. Dann folgt für $n \geq N$, dass

$$\inf\{f(x) \mid x > x_0\} \leq f(a_n) < \inf\{f(x) \mid x > x_0\} + \varepsilon.$$

Daraus folgt, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \inf\{f(x) \mid x > x_0\}$, was die erste Gleichung beweist.

- ● Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

  Richtig: Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist

  $$f(x) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x < x_0, \\ x+1, & \text{wenn } x \geq x_0. \end{cases}$$

  Dann ist $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = x_0 + 1$ aber $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = x_0$. Daher existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nicht (vgl. Aufgabe 8.5(a)).

- ○ Wenn $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist f in x_0 stetig.

  Falsch: Die Aussage ist wahr. Da f monoton steigend ist, gilt

  $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

  Aus der Gleichheit des links- und rechtsseitigen Grenzwerts folgt dann $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$ (vgl. Aufgabe 8.5(a)). Aufgrund von Bemerkung 3.10.4(2) ist f somit in x_0 stetig.

(c) Sei $f(x) = |e^{ix} - 1|$ für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt *nicht*?

- ○ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}$

  Falsch: Die Aussage ist wahr. Es gilt

  $$|e^{ix} - 1| = \Big|\cos(x) - 1 + i\sin(x)\Big| = \sqrt{(\cos(x)-1)^2 + \sin(x)^2}.$$

  An der letzteren Darstellung sehen wir, dass die Funktion f stetig ist. Somit existiert der Grenzwert von f in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ und es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = |e^{ix_0} - 1|$ (vgl. Bemerkung 3.10.4(2)).

- ○ $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

  Falsch: Die Aussage ist wahr. In der Tat, f ist wegen $0 \leq |e^{ix} - 1| \leq |e^{ix}| + 1 = 2$ für alle $\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Daher ist $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

- ○ $\lim_{x\to\infty}(x + f(x))$ existiert

  Falsch: Die Aussage ist wahr. In der Tat, da f nicht-negativ ist, gilt $x + f(x) \geq x$ und somit folgt $\lim_{x\to\infty}(x + f(x)) = \infty$.

- ● $\lim_{x\to\infty}(xf(x))$ existiert

  Richtig: Die Aussage ist falsch. Betrachten Sie die durch $a_n = 2n\pi$ und $b_n = \pi + 2n\pi$ definierten Folgen. Dann gilt aufgrund der 2π-Periodizität von $x \mapsto e^{ix}$ und $e^0 = 1$ und $e^{i\pi} = -1$, dass

$$a_n \underbrace{f(a_n)}_{=0} = 0 \quad \text{und} \quad b_n \underbrace{f(b_n)}_{=2} = 2b_n.$$

  Es folgt $\lim_{n\to\infty}(a_n f(a_n)) = 0$ und $\lim_{n\to\infty}(b_n f(b_n)) = \infty$ und der Grenzwert $\lim_{x\to\infty}(xf(x))$ existiert nicht.

(d) Seien $f, g\colon (0,1] \to (0,\infty)$ Funktionen, so dass sowohl $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ als auch $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ existieren. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert?

- ○ $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (0,1]$

  Falsch: Ein Gegenbeispiel ist gegeben durch $f(x) = x(2+\sin(1/x))$ und $g(x) = x(5-\sin(1/x))$. Dann gilt $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ und für alle $x \in (0,1]$, dass

$$0 < f(x) = x(2+\sin(1/x)) < x(5-\sin(1/x)) = g(x),$$

  da $|\sin|$ auf $\mathbb{R}$ durch 1 beschränkt ist. Allerdings gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2+\sin(1/x)}{5-\sin(1/x)},$$

  was für $x \to 0^+$ zwischen $3/4$ (falls $\sin(1/x) = 1$) und $1/6$ (falls $\sin(1/x) = -1$) oszilliert, und somit nicht konvergiert.

- ● $\lim_{x\to 0^+} f(x) > \lim_{x\to 0^+} g(x)$

  Richtig: Aus $g(x) > 0$ für alle $x \in (0,1]$ folgt, dass $\lim_{x\to 0^+} g(x) \geq 0$ (vgl. Bemerkung 3.10.4(4)). Aus der gegebenen Bedingung folgt daher $\lim_{x\to 0^+} f(x) > 0$. Nun gibt es zwei Fälle: Wenn $\lim_{x\to 0^+} g(x) > 0$ ist, dann ist $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 0^+} f(x)}{\lim_{x\to 0^+} g(x)}$. Wenn $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ ist, dann folgt $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

- ○ $f(x) > g(x)$ für alle $x \in (0,1]$

  Falsch: Man erhält ein Gegenbeispiel, wenn man die Funktionen f und g im Gegenbeispiel zur ersten Antwortmöglichkeit vertauscht.

- ○ $\lim_{x\to 0^+} f(x) \leq \lim_{x\to 0^+} g(x)$

  Falsch: Sowohl das Gegenbeispiel zur ersten oder dritten Antwortmöglichkeit erfüllen $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ und funktionieren daher auch hier.

8.2. Operationen und Grenzwerte. Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, und x_0 ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big),$$

wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren.

Lösung: Wir schreiben $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $B = \lim_{x\to x_0} g(x)$. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$. Dann gilt gemäss Definition aus der Vorlesung

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A,\ \lim_{n\to\infty} g(a_n) = B.$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen (Satz 2.1.8) folgt dann direkt:

$$\lim_{n\to\infty}(f(a_n)+g(a_n)) = A+B,\ \lim_{n\to\infty}(f(a_n)g(a_n)) = AB.$$

Da dies für jede Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt, haben wir damit gezeigt, dass

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = A+B = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = AB = \Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big),$$

wie gewünscht.

8.3. Grenzwerte von rationalen Funktionen. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x+2}{x-2}$

(b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x+2}{x^2-4x+4}$

(c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)(x-4)}{x^2(x+1)}$

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)(x-4)}{x(x-1)}$

Stimmen die rechtsseitigen Grenzwerte in (a)–(c) mit dem jeweiligen entsprechenden linksseitigen Grenzwert für $x \to 2^-$ überein?

Lösung: Wir geben in den Lösungen jeweils die relevante Argumentation, um den Grenzwert bestimmen zu können, allerdings keine formell vollständigen Beweise basierend auf der Definition aus der Vorlesung über Folgen. Sie sind eingeladen, die einzelnen Schritte zu formalisieren indem Sie eine geeignete Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ nutzen um die Aussagen jeweils auf die Definition zurückzuführen.

(a) Der Zähler $x^2 - x + 2$ ist eine stetige Funktion und hat in $x_0 = 2$ den Wert 4. Daher liegt der Zähler für x nahe bei $x_0 = 2$ im Intervall $(3, 5)$. Der Nenner $x - 2$ hat in $x_0 = 2$ eine Nullstelle. Daher konvergiert $1/|x-2|$ für $x \to 2$ gegen ∞. Zusammen impliziert dies, dass

$$\lim_{x\to 2}\left|\frac{x^2-x+2}{x-2}\right| = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+2}{|x-2|} = \infty.$$

Nun müssen wir noch Vorzeichen betrachten, um zu entscheiden, ob auch $\frac{x^2-x+2}{x-2}$ konvergiert, und wenn ja, ob der Grenzwert ∞ oder $-\infty$ ist. Der Zähler ist für x nahe bei $x_0 = 2$ positiv, wie wir schon festgestellt haben. Der Nenner ist für $x > x_0 = 2$ auch positiv. Daher ist der Bruch $\frac{x^2-x+2}{x-2}$ wenn sich x von oben an $x_0 = 2$ annähert positiv. Dies impliziert, dass

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x+2}{x-2} = \infty.$$

Um die Frage am Ende der Aufgabe zu beantworten, bemerken wir, dass der Nenner für $x < x_0 = 2$ negativ ist. Somit ist der Bruch $\frac{x^2-x+2}{x-2}$ negativ, wenn sich x von unten an $x_0 = 2$ annähert. Somit ist der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x+2}{x-2} = -\infty,$$

was nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt.

(b) Nachdem wir bemerkt haben, dass $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, führt dieselbe Argumentation wie in (a) für den rechtsseitigen Grenzwert zum Ergebnis

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x+2}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-x+2}{(x-2)^2} = \infty.$$

Nun ist der Nenner aber auch für $x < x_0 = 2$ positiv, und auch der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x+2}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x+2}{(x-2)^2} = \infty,$$

was mit dem rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt.

(c) Hier haben sowohl Zähler als auch Nenner eine Nullstelle in $x_0 = 2$. Wir können für $x \notin \{0, 2\}$ Zähler und Nenner faktorisieren und dann kürzen:

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-2x} = \frac{(x+1)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}.$$

Da $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig ist, gilt

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}.$$

Insbesondere ist dieser Wert sowohl der rechts- als auch der linksseitige Grenzwert in $x_0 = 2$.

Bemerkung: Die Funktion $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ ist eine stetige Fortsetzung von $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$.

(d) Wir multiplizieren Zähler und Nenner aus und formen um ($x \notin \{-1, 0\}$):

$$\frac{(2x-3)(x-4)}{x^2(x+1)} = \frac{2x^2 - 11x + 12}{x^3 + x^2} = \frac{\frac{2}{x} - \frac{11}{x^2} + \frac{12}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

In der letzten Darstellung konvergiert der Zähler für $x \to \infty$ gegen 0 und der Nenner gegen 1. Daher gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x-3)(x-4)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{11}{x^2} + \frac{12}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}} = 0.$$

(e) Wir multiplizieren Zähler und Nenner aus und formen um ($x \notin \{0, 1\}$):

$$\frac{(x+2)(x-4)}{x(x-1)} = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - x} = \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}.$$

In der letzten Darstellung konvergieren sowohl Zähler als auch Nenner für $x \to \infty$ gegen 1. Daher gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+2)(x-4)}{x(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

8.4. Exponentielles Wachstum. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{x^k} = \infty.$$

Lösung: Per Definition ist $2^x = e^{x \ln(2)}$, wobei wir aufgrund der strengen Monotonie von ln wissen, dass $\ln(2) > \ln(1) = 0$ ist. Es gilt daher für $x \geq 0$, dass

$$2^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln(2))^k}{k!} \geq x^{k+1} \cdot \frac{\ln(2)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt für $x > 0$:

$$\frac{2^x}{x^k} \geq x \cdot \underbrace{\frac{\ln(2)^{k+1}}{(k+1)!}}_{>0}.$$

Da die rechte Seite für $x \to \infty$ gegen ∞ strebt, folgt, dass auch $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^k} = \infty$.

8.5. Links- und rechtsseitige Grenzwerte.

(a) Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D. Beweisen Sie die Äquivalenz:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \text{ existiert} \iff \begin{array}{l} \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ und } \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ existieren und} \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \end{array}$$

Lösung: "$\Rightarrow$": Nehmen wir an, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ existiert. Dies bedeutet gemäss Definition aus der Vorlesung, dass für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$. Da dies für jede solche Folge gilt, gilt es insbesondere für Folgen in D mit $a_n > x_0$ für alle $n \geq 1$, was impliziert, dass $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$. Genauso gilt es für alle Folgen in D mit $a_n < x_0$ für alle $n \geq 1$, was impliziert, dass auch $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

"$\Leftarrow$": Für die umgekehrte Implikation sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert. Wir zerlegen $(a_n)_{n\geq 1}$ in zwei Teilfolgen $(a_{n(k)})_{k\geq 1}$ und $(a_{m(k)})_{k\geq 1}$, wobei die $n(k)$ alle Indizes sind mit $a_{n(k)} < x_0$ und die $m(k)$ alle Indizes sind mit $a_{m(k)} > x_0$. Dann folgt aus der Annahme, dass $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ beide existieren und gleich einem Wert A sind, dass $\lim_{k\to\infty} f(a_{m(k)}) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n(k)}) = A$. Da die beiden Teilfolgen $(a_{n(k)})_{k\geq 1}$ und $(a_{m(k)})_{k\geq 1}$ zusammen die gesamte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ergeben, folgt hieraus $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = A$. Damit haben wir gezeigt, dass $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert (und gleich A ist).

(b) Sei $\operatorname{sgn}(x)$ definiert als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x > 0, \\ -1, & \text{wenn } x < 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos(x)^2.$$

Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert von f in $x_0 = 0$. Existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$? Falls ja, bestimmen Sie diesen Grenzwert. Falls nein, erklären Sie warum nicht. Ist f eine stetige Funktion?

Lösung: Da $\operatorname{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$ und $\operatorname{sgn}(x) = -1$ für $x < 0$ sind die links- und rechtsseitigen Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \cos(x)^2 = 1,\\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \Big(-\cos(x)^2\Big) = -1,
\end{aligned}$$

wobei wir die Stetigkeit von cos und $\cos(0) = 1$ verwendet haben (vgl. Bemerkung 3.10.4(2)). Da $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ ist, existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$ gemäss Aufgabenteil (a) nicht. Es folgt mit Bemerkung 3.10.4(2), dass f in 0 unstetig ist.

8.6. Oszillierendes Grenzverhalten. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \sin(1/x)$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $y \in [-1, 1]$ eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$. Folgern Sie daraus, dass $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ nicht existiert.

Lösung: Sei $y \in [-1, 1]$. Da wir wissen, dass $\sin\colon [0, 2\pi) \to [-1, 1]$ surjektiv ist, gibt es ein $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $\sin(\theta) = y$. Wir betrachten nun die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$, gegeben durch $a_n = \frac{1}{\theta+2n\pi}$. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$ von rechts gegen 0. Ausserdem ist

$$f(a_n) = \sin(\theta + 2n\pi) = \sin(\theta) = y$$

aufgrund der 2π-Periodizität von sin. Damit ist auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$. Insbesondere finden wir jetzt zwei Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$, die von rechts gegen 0 konvergieren, für die aber $(f(a_n))_{n\geq 1}$ und $(f(b_n))_{n\geq 1}$ gegen unterschiedliche Werte konvergieren. Dies impliziert, dass $\lim_{x\to 0^+} \sin(1/x)$ nicht existiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} xf(x) = 0$.

Lösung: Wir bemerken, dass für alle $x \neq 0$ gilt, dass $-|x| \leq x\sin(1/x) \leq |x|$, und $\lim_{x\to 0}|x| = 0$. Es folgt daher aus Bemerkung 3.10.4(5), dass $\lim_{x\to 0} xf(x)$ existiert und gleich 0 ist.