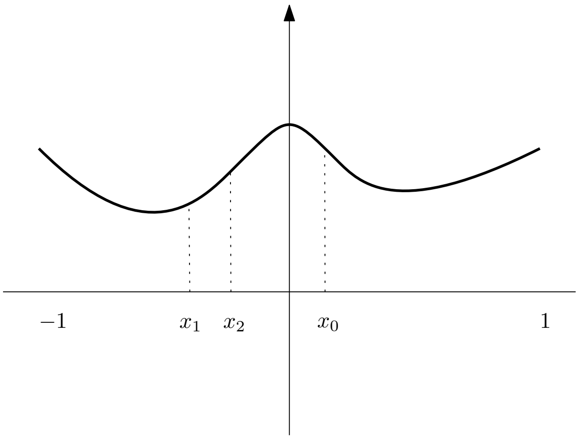
9.1. MC Fragen: Differenzierbarkeit. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

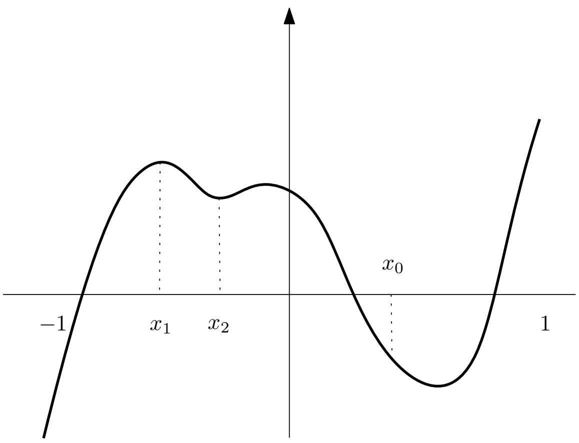
(a) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem folgendem Graphen:



Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ● Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ○ $f'(x_0) > 0$.
- ○ $f'(x_1) = 0$.
- ○ $f'(x_2) < 0$.

(b) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem folgendem Graphen:



Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ○ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.

- ○ $f'(x_0) > 0$.
- ● $f'(x_1) = 0$.
- ○ $f'(x_2) < 0$.

(c) Definiere für $x > 0$:

$$f(x) := \liminf_{k\to\infty} \Big(\min\{x, x^{-1}\} \Big)^k.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ○ f ist stetig und differenzierbar
- ○ f ist differenzierbar, aber nicht stetig
- ○ f ist stetig, aber nicht differenzierbar
- ● f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

Lösung: Da $0 < \min\{x, x^{-1}\} < 1$ für alle $x \in (0,\infty) \setminus \{1\}$ gilt $f(x) = 0$ falls $x \neq 1$. Ausserdem gilt $f(1) = 1$. Da gemäss Definition für die Stetigkeit oder Differenzierbarkeit einer Funktion die jeweilige Eigenschaft in *allen* Punkten des Definitionsbereichs gelten muss, ist die Funktion f also weder stetig noch differenzierbar.

(d) Welche der folgenden Aussagen stimmt *nicht*?

- ○ Ist der Graph einer Funktion eine Gerade, dann ist die Funktion differenzierbar und die Ableitung ist konstant.

  Falsch: Die Aussage ist wahr. Falls der Graph von f eine Gerade ist, dann hat f die Form $f(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ konstant sind. Dann gilt $f'(x) = a$ was eine Konstante ist.

- ○ Ist eine Funktion f das Doppelte einer differenzierbaren Funktion g, dann ist die Ableitung von f das Doppelte der Ableitung von g.

  Falsch: Die Aussage ist wahr. Die Ableitung ist linearer, in dem Sinn, dass für eine differenzierbare Funktion g und $c \in \mathbb{R}$ gilt, dass $c \cdot g$ auch differenzierbar ist und $(c \cdot g)' = c \cdot g'$.

- ● Ist $f(0) < 0$ und f in 0 differenzierbar, dann gilt $f'(0) < 0$.

  Richtig: Ein Gegenbeispiel ist $f(x) = x - 1$. Dann ist $f(0) = -1 < 0$ und $f'(x) = 1 > 0$.

(e) Seien $a < b$ reelle Zahlen, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $f(a) < f(b)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

○ Wenn es für jedes $c \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a,b]$ gibt mit $f(x) = c$, dann ist f stetig.

Falsch: Ein Gegenbeispiel ist: $a = -1$, $b = 1$ und

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ -x-1, & x \in [-1,0) \end{cases}.$$

Dann ist f beschränkt und $f(a) = f(-1) = 0 < 1 = f(1) = f(b)$. Für jedes $c \in [f(a), f(b)] = [0,1]$ gibt es, ein $x \in [a,b] = [-1,1]$ mit $f(x) = c$, z.B. $x = c$. Allerdings ist f in $x_0 = 0$ unstetig.

○ Wenn $g \circ f$ und g differenzierbar sind, dann ist f differenzierbar.

Falsch: Sei $g(x) = 0$ die konstante Nullfunktion. Dann sind g und $g \circ f$ differenzierbar, unabhängig davon, was f ist. Allerdings ist z.B. f aus dem Gegenbeispiel zur ersten Antwortmöglichkeit oben nicht differenzierbar (in $x_0 = 0$).

● Wenn f differenzierbar ist, dann gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Richtig: Dies folgt direkt aus dem Mittelwertsatz (Satz 4.2.4).

9.2. Berechnung von Ableitungen. Entscheiden Sie, wo die folgenden Funktionen definiert und differenzierbar sind, und berechnen Sie dort die Ableitungen.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x\ln(x), \\ f_2(x) &= \exp(\exp(x) - 1), \\ f_3(x) &= \cos(\ln(x^2+1)), \\ f_4(x) &= \frac{1 + x + x^2}{(2x^3+3)^2}. \end{aligned}$$

Lösung: Aus den Sätzen und Beispielen aus der Vorlesung folgt:

$$f_1'(x) = (x\ln(x))' = (x)'\ln(x) + x(\ln(x))' = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

für $x \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= (\exp(\exp(x) - 1))' = \exp'(\exp(x) - 1) \cdot (\exp(x) - 1)' \\ &= \exp(\exp(x) - 1)\exp(x) \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= (\cos(\ln(x^2+1)))' = \cos'(\ln(x^2+1)) \cdot (\ln(x^2+1))' \\ &= -\sin(\ln(x^2+1)) \ln'(x^2+1) \cdot (x^2+1)' \\ &= -\sin(\ln(x^2+1)) \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$, und

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \left(\frac{1+x+x^2}{(2x^3+3)^2}\right)' = \frac{(1+x+x^2)'(2x^3+3)^2 - (1+x+x^2)((2x^3+3)^2)'}{(2x^3+3)^4} \\ &= \frac{(1+2x)(2x^3+3)^2 - 2(1+x+x^2)(2x^3+3) \cdot 6x^2}{(2x^3+3)^4} \\ &= \frac{(1+2x)(2x^3+3) - 12x^2(1+x+x^2)}{(2x^3+3)^3} \\ &= \frac{3+6x-12x^2-10x^3-8x^4}{(2x^3+3)^3} \end{aligned}$$

für $x \neq -\sqrt[3]{3/2}$.

9.3. Ableitung von geraden und ungeraden Funktionen. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *gerade* falls $f(-x) = f(x)$, und *ungerade* falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Falls f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann gilt:

(a) f gerade $\implies$ f' ungerade.

Lösung: Es ist zu zeigen, dass $f'(-x) = -f'(x)$. Dies folgt aus der Definition der Ableitung und der Eigenschaft $f(-x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(-x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h' \to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{-h'} \\ &= -\lim_{h' \to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{h'} \\ &= -f'(x). \end{aligned}$$

(b) f ungerade $\implies$ f' gerade.

Lösung: Es ist zu zeigen, dass $f'(-x) = f'(x)$. Dies folgt aus der Definition der Ableitung und der Eigenschaft $f(-x) = -f(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(-x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \\
&= \lim_{h'\to 0} \frac{f(x+h') - f(x)}{h'} \\
&= f'(x).
\end{aligned}$$

9.4. Ableitung einer oszillierenden Funktion.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin(1/x)$.

Lösung: Falls $x \neq 0$, gilt nach der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned}
f'(x) = (x\cdot\sin(1/x))' &= \sin(1/x) + x\cdot(\sin(1/x))' \\
&= \sin(1/x) + x\cdot\cos(1/x)\cdot\frac{(-1)}{x^2} \\
&= \sin(1/x) - \frac{1}{x}\cdot\cos(1/x).
\end{aligned}$$

(b) Aus Aufgabe 8.6(b) in der letzten Serie folgt, dass f die folgende stetige Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$ hat:

$$\tilde f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad \tilde f(x) = \begin{cases} f(x), & x\neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ist $\tilde f$ in $x_0 = 0$ differenzierbar?

Lösung: Die Funktion $\tilde f$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, da für $x \neq 0$

$$\frac{\tilde f(x) - \tilde f(0)}{x - 0} = \sin(1/x),$$

wovon der Grenzwert für $x \to 0$ gemäss Aufgabe 8.6(a) in der letzten Serie nicht existiert.

9.5. $\star$ **Hyperbel- und Areafunktionen.** (vgl. Beispiel 4.2.7 im Skript)

Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$ die folgenden *Hyperbelfunktionen*:

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad (\textit{Cosinus hyperbolicus})$$
$$g(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \qquad (\textit{Sinus hyperbolicus})$$

(a) Zeigen Sie, dass f und g in $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, und dass Folgendes gilt:

$$f' = g, \quad g' = f.$$

Lösung: Die Funktionen e^x und e^{-x} sind differenzierbar in $\mathbb{R}$. Linearkombinationen von differenzierbaren Funktionen sind differenzierbar, und daher sind f und g differenzierbar. Es gilt:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = g(x),$$
$$g'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = f(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: Aus (a) folgt zusammen mit der Produktregel, dass für $x \in \mathbb{R}$

$$(f(x)^2 - g(x)^2)' = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0.$$

Aus Korollar 4.2.5(1) folgt, dass $f(x)^2 - g(x)^2$ konstant ist, und daher gilt

$$f(x)^2 - g(x)^2 = f(0)^2 - g(0)^2 = 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass g streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

Lösung: Aus (a) folgt, dass

$$g'(x) = f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x}{2} > 0,$$

da $e^y > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist. Die Aussage folgt nun aus Korollar 4.2.5(4).

(d) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

Lösung: Es gilt $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Daraus folgt

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty,$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^{-y} - e^y}{2} = -\lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{2} = -\infty.$$

(e) Folgern Sie, dass $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Bijektion ist, und dass g^{-1} differenzierbar ist mit Ableitung

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Man bezeichnet $g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als arsinh (*Areasinus hyperbolicus*).

Lösung: Die Aufgabenteile (c) und (d) implizieren, dass $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. Ausserdem ist g differenzierbar und $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Korollar 4.1.12 impliziert daher, dass $g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar ist (beachte die Bemerkung zu diesem Korollar in der Vorlesung). Wir erhalten nun für $y \in \mathbb{R}$:

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{f(g^{-1}(y))}.$$

Aus (b) und $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt, dass $f(x) = \sqrt{1+g(x)^2}$. Wenn wir dies im letzten Ausdruck oben einsetzen, finden wir

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+g(g^{-1}(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

(f) Zeigen Sie, dass $g(x) > 0$ wenn $x > 0$ und $g(x) < 0$ wenn $x < 0$ ist.

Lösung: Die Funktion g ist gemäss (c) streng monoton wachsend, und $g(0) = 0$. Dies impliziert direkt, dass $g(x) < g(0) = 0$ wenn $x < 0$ und $0 = g(0) < g(x)$ wenn $x > 0$.

(g) Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ ist.

Lösung: Kombinieren Sie (a) und (f), um das Vorzeichen der Ableitung $f'(x)$ zu bestimmen. Dann verwendet man Korollar 4.2.5(4) bzw. (6).

(h) Sei f_1 die Einschränkung der Funktion f auf $[0, \infty)$. Zeigen Sie, dass f_1 eine Bijektion von $[0, \infty)$ nach $[1, \infty)$ ist. Man bezeichnet $f_1^{-1} \colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ als arcosh (*Areacosinus hyperbolicus*).

Lösung: Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty,$$

und $f(0) = 1$. Damit folgt aus (g), dass f_1 eine Bijektion von $[0, \infty)$ nach $[1, \infty)$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass f_1^{-1} in $(1, \infty)$ differenzierbar ist, und dass

$$(f_1^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

für alle $y > 1$.

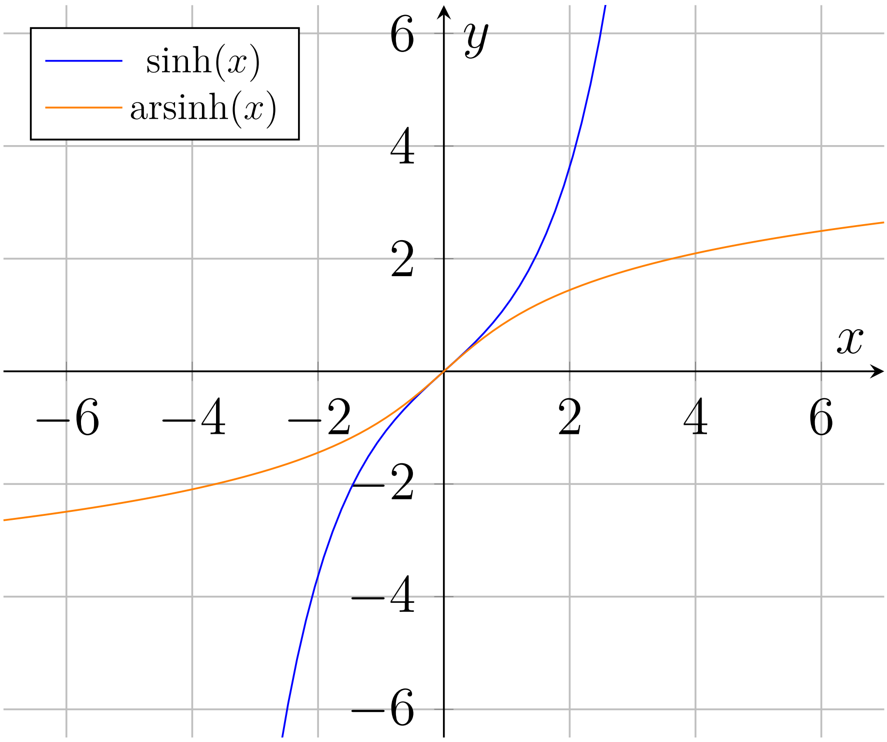
Lösung: Da $f_1'(x) = g(x) > 0$ für alle $x > 0$, sind die Voraussetzungen von Korollar 4.1.12 für alle $y \in (1, \infty)$ erfüllt (beachte die Bemerkung zu diesem Korollar in der Vorlesung). Da aus (b) und (f) zusammen folgt, dass $g(x) = \sqrt{f(x)^2 - 1}$ wenn $x \geq 0$, erhalten wir für die Ableitung von f_1^{-1}:

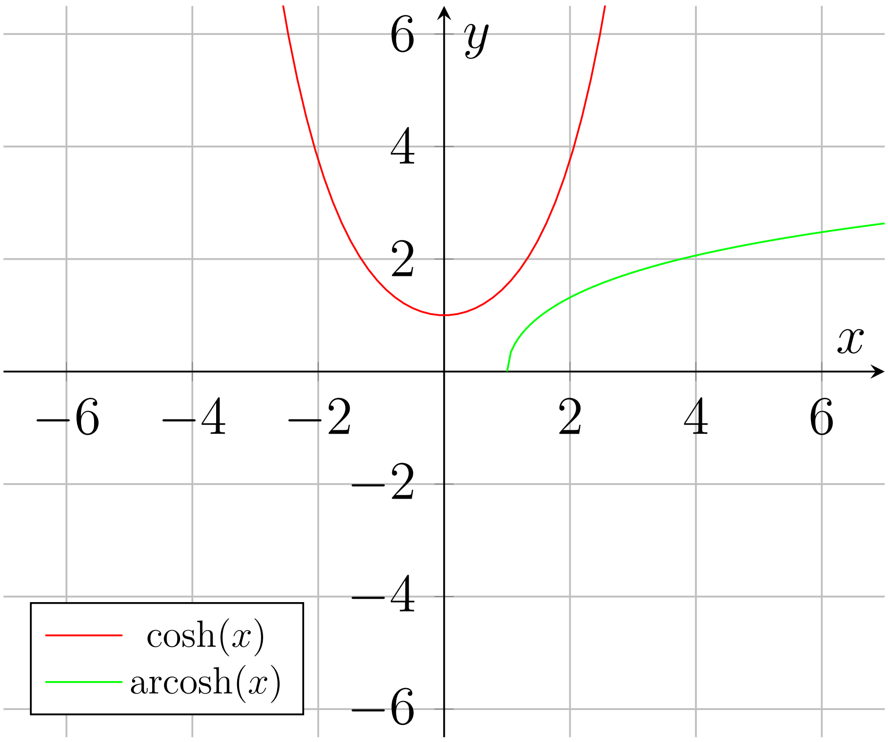
$$(f_1^{-1})'(y) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(y))} = \frac{1}{g(f_1^{-1}(y))} = \frac{1}{\sqrt{f(f_1^{-1}(y))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

für alle $y > 1$.

(j) Zeichnen Sie die Graphen von $\sinh, \cosh, \operatorname{arsinh}, \operatorname{arcosh}$ mit einem Computeralgebrasystem Ihrer Wahl.

Lösung:


sinh(x)
arsinh(x)
x
y
−6 −4 −2 2 4 6
6 4 2 −2 −4 −6


cosh(x)
arcosh(x)
x
y
−6 −4 −2 2 4 6
6 4 2 −2 −4 −6