10.1. MC Fragen: Arcusfunktionen, Differenzierbarkeit und Konvexität. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Für alle $y \in [-1, 1]$ gilt $\arccos(y) = \pi - \arcsin(y)$.

- ○ Wahr
- ● Falsch

Lösung: Für $y = 1$ gilt $\arccos(1) + \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, was schon der Aussage widerspricht.

Die korrekte Formel ist $\arccos(y) = \pi/2 - \arcsin(y)$ für alle $y \in [-1, 1]$. Um dies zu beweisen setzen wir $x := \pi/2 - \arcsin(y)$. Dann gilt mit unserer Definition von arcsin, dass $x \in [0, \pi]$, und $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x) = \sin(\arcsin(y)) = y$. Da arccos als die Umkehrabbildung von $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ definiert wurde, folgt hieraus, dass $\arccos(y) = x = \pi/2 - \arcsin(y)$.

(b) Es gibt eine beschränkte und differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- ● Wahr
- ○ Falsch

Lösung: Der Arcustangens ist beschränkt und differenzierbar und erfüllt $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 4.2.6(3)).

(c) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit Ableitung wie im folgenden Graphen rechts. Welche der folgenden Aussagen stimmt *nicht*?

- ○ f ist nicht monoton

  Falsch: Die Aussage ist wahr. Da f' Vorzeichen wechselt, kann f nicht monoton sein.

- ○ f' besitzt eine Nullstelle

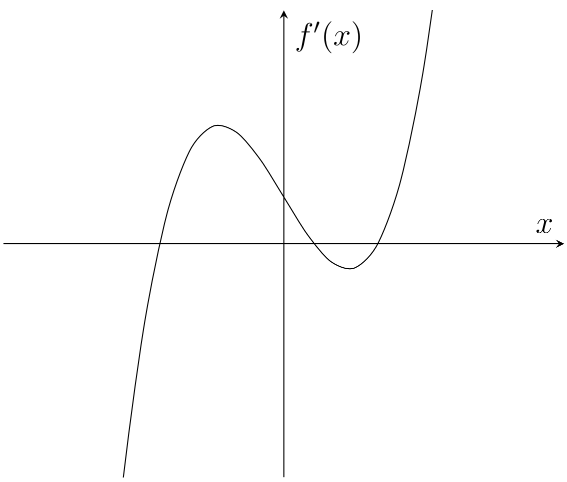
  Falsch: Die Aussage ist wahr. f' besitzt (mindestens) drei Nullstellen.

- ○ f'' besitzt eine Nullstelle

  Falsch: Die Aussage ist wahr. f' hat zwei Extremstellen, was Nullstellen von f'' ergibt.

- ● f ist konvex

  Richtig: f' ist nicht monoton steigend, deshalb ist f nicht konvex.



(d) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Welche der folgenden Implikationen stimmt *nicht*?

○ f konvex $\implies f'' \geq 0$

Falsch: Die Aussage ist wahr. Gemäss Satz 4.2.16 impliziert Konvexität von f, dass f' monoton steigend ist. Dies impliziert $f'' \geq 0$.

○ $f'' \geq 0 \implies f$ konvex

Falsch: Die Aussage ist wahr. Siehe Korollar 4.2.17.

● f streng konvex $\implies f'' > 0$

Richtig: $f(x) = x^4$ ist streng konvex, da die Ableitung $f'(x) = 4x^3$ streng monoton steigend ist (Satz 4.2.16). Allerdings ist $f''(0) = 0$.

○ $f'' > 0 \implies f$ streng konvex

Falsch: Die Aussage ist wahr. Siehe Korollar 4.2.17.

10.2. Monotonie und Konvexität. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Teilmengen des Definitionsbereichs, in denen sie (i) monoton steigend, (ii) monoton fallend, (iii) konvex sind.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 6x^2 - 1$

Lösung: Wir beginnen damit, das Vorzeichen der ersten Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$ zu untersuchen. Die erste Ableitung ist positiv, genau dann wenn $x < 0$ oder $x > 4$, und negativ, genau dann wenn $0 < x < 4$. Das erlaubt uns zu schliessen, dass f auf $(-\infty, 0]$ und auf $[4, \infty)$ streng monoton wachsend ist, während f auf $[0, 4]$ streng monoton fallend ist (Korollar 4.2.5). (Man bemerke, dass in Korollar 4.2.5 die strikte Positivität oder Negativität der Ableitung in den Randpunkten nicht vorausgesetzt wird.)

Für die Konvexität betrachten wir die zweite Ableitung, welche gegeben ist durch $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$. Diese ist positiv für $x > 2$. Somit ist f' auf $[2, \infty)$ streng monoton wachsend (Korollar 4.2.5) und somit ist f auf $[2, \infty)$ streng konvex (Satz 4.2.16). (Man bemerke, dass Satz 4.2.16 auch für abgeschlossene Intervalle gilt, wie in der Vorlesung formuliert.)

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Wie in (a) berechnen wir $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$, woraus folgt, dass $f'(x) > 0$ genau dann wenn $x < 0$, und $f'(x) < 0$ genau dann wenn $x > 0$. Daraus folgt, dass f auf $(-\infty, 0]$ streng monoton wachsend und auf $[0, \infty)$ streng monoton fallend ist (Korollar 4.2.5).

Für die Konvexität berechnen wir

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)(6x^2-2)}{(x^2+1)^4} = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3},$$

woraus wir wie in (a) folgern können, dass f auf $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ und auf $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ streng konvex ist.

10.3. Regel von L'Hospital. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin(x^2 - x)}$

Lösung: Da

$$\lim_{x\to 0}(\exp(x^2) - \cos(x)) = 1 - 1 = 0,$$

und

$$\lim_{x\to 0} \sin(x^2 - x) = \sin(0) = 0,$$

können wir die Regel von L'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin(x^2 - x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\exp(x^2) - \cos(x))'}{(\sin(x^2 - x))'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x\exp(x^2) + \sin(x)}{\cos(x^2 - x)(2x - 1)} = \frac{0}{-1} = 0.\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-x}}{x^2 - \sin(x)}$

Lösung: Da

$$\lim_{x\to 0}(e^{3x} - e^{-x}) = \lim_{x\to 0}(x^2 - \sin(x)) = 0,$$

können wir die Regel von L'Hospital anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x^2 - \sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(e^{3x} - e^{-x})'}{(x^2 - \sin(x))'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x} + e^{-x}}{2x - \cos(x)} = \frac{3+1}{-1} = -4.\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-4x^2+9}{x^2+x-12}$

Lösung: Da 3 Nullstelle von Zähler und Nenner ist, können wir die Regel von L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-4x^2+9}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3} \frac{3x^2-8x}{2x+1} = \frac{3\cdot 3^2 - 8\cdot 3}{2\cdot 3+1} = \frac{3}{7}.$$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2x)}{x^2}$

Lösung: Da

$$\lim_{x\to\infty} \ln(2x) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

können wir die Regel von L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} (e^x+x)^{1/x}$

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} (e^x+x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left((e^x+x)^{1/x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+x)} \overset{(1)}{=} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x}}$$

wobei (1) gilt, da e^x stetig ist. Da sowohl der Zähler als auch der Nenner im Exponenten gegen unendlich divergieren, können wir die Regel von L'Hospital (zweimal) anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{e^x+x}(e^x+1)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1.$$

Daher ist der gesuchte Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} (e^x+x)^{1/x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e.$$

10.4. Konkave Funktionen. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heisst (*streng*) *konkav*, falls $-f$ (streng) konvex ist. Formulieren Sie Aussagen für konkave Funktionen, die den Aussagen über konvexe Funktionen in Lemma 4.2.15, Satz 4.2.16 und Korollar 4.2.17 entsprechen (ohne Beweise).

Lösung: LEMMA 4.2.15 FÜR KONKAVE FUNKTIONEN: Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konkav, falls für alle $x_0 < x < x_1$ in I

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

gilt. Sie ist genau dann streng konkav, wenn in obiger Ungleichung immer $>$ gilt.

SATZ 4.2.16 FÜR KONKAVE FUNKTIONEN: Eine differenzierbare Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann (streng) konkav, falls f' (streng) monoton fallend ist.

KOROLLAR 4.2.17 FÜR KONKAVE FUNKTIONEN: Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Wenn $f''(x) \leq 0$ (bzw. $f''(x) < 0$) für alle $x \in I$, dann ist f (streng) konkav.

10.5. Minima von konvexen Funktionen. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von f ein globales Minimum ist.

Lösung: Nehmen wir zum Widerspruch an, dass f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Minimum hat und dass es ein $x_1 \in \mathbb{R}$ gibt, in dem $f(x_1) < f(x_0)$ ist. Gemäss der Definition eines lokalen Minimums gibt es $\delta > 0$, so dass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Da

$$\lim_{\lambda \to 1^-} (\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1) = x_0$$

gibt es ein $\lambda \in (0,1)$, so dass $\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Da wir annehmen, dass $f(x_1) < f(x_0)$, erhalten wir

$$\lambda f(x_0) + (1 - \lambda) f(x_1) < \lambda f(x_0) + (1 - \lambda) f(x_0) = f(x_0).$$

Nach Definition von δ haben wir aber auch

$$f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1) \geq f(x_0).$$

Die Kombination dieser beiden Ungleichungen führt zu

$$\lambda f(x_0) + (1 - \lambda) f(x_1) < f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1),$$

was gemäss Definition der Konvexität von f widerspricht.

10.6. Youngsche Ungleichung. Sei $p > 1$ eine reelle Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $q > 1$ existiert, so dass $1/p + 1/q = 1$.

Lösung: Durch Umformen erhalten wir für $p, q > 1$:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \iff q = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}.$$

Somit kann für gegebenes $p > 1$ nur der Wert $q = \frac{p}{p-1}$ die Gleichung $1/p + 1/q = 1$ erfüllen. Dies beweist die Eindeutigkeit. Da für $p > 1$ auch tatsächlich gilt, dass $\frac{p}{p-1} > 1$, beweist obige Umformung auch die Existenz von $q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Konvexität der Funktion $-\ln(x)$ in geeigneter Weise.

Lösung: Wenn $x = 0$ oder $y = 0$, dann ist die Ungleichung klar. Seien ab nun $x, y > 0$. Wir wissen, dass $f(x) = -\ln(x)$ konvex in $(0, \infty)$ ist:

$$(-\ln(x))'' = (-1/x)' = 1/x^2 > 0$$

für alle $x > 0$ (vgl. auch Beispiel 4.2.18). Die Konvexität von f bedeutet:

$$f(\lambda_1 z + \lambda_2 w) \leq \lambda_1 f(z) + \lambda_2 f(w), \quad \forall z, w > 0, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Wenn wir $\lambda_1 = 1/p$, $\lambda_2 = 1/q$, $z = x^p$ und $w = y^q$ einsetzen, folgt, dass

$$-\ln(x^p/p + y^q/q) \leq -\ln(x^p)/p - \ln(y^q)/q = -\ln(x) - \ln(y).$$

Da exp monoton wachsend ist, impliziert diese Ungleichung, dass

$$xy = \exp(\ln(x) + \ln(y)) \leq \exp(\ln(x^p/p + y^q/q)) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$

was zu zeigen war.