11.1. MC Fragen: Höhere Ableitungen, Funktionenfolgen, lokale Extrema. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Welche der folgenden Implikationen stimmt *nicht* für $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$?

- ● f ist differenzierbar $\implies$ f ist stetig differenzierbar

  Richtig: Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist:

  $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

  In allen Punkten $x \neq 0$ ist f differenzierbar und nach Produkt- und Kettenregel gilt:

  $$f'(x) = 2x\sin(1/x) + x^2\cos(1/x)\cdot(-1/x^2) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x).$$

  Auch in $x = 0$ ist f differenzierbar:

  $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0,$$

  vgl. Aufgabe 8.6(b) in Serie 8. Ähnlich wie in Aufgabe 8.6(a) sieht man aber, dass der Grenzwert von f' für $x \to 0$ nicht existiert. Also ist f' nicht stetig. Gemäss Definition bedeutet dies, dass f nicht stetig differenzierbar ist.

- ○ f ist differenzierbar $\implies$ f ist stetig

  Falsch: Die Aussage ist gemäss Korollar 4.1.5 wahr.

- ○ f ist differenzierbar und f' kann als konvergente Potenzreihe dargestellt werden $\implies$ f ist glatt

  Falsch: Die Aussage ist wahr: Gemäss Korollar 4.4.3 sind konvergente Potenzreihen glatt. Wenn f' existiert und glatt ist, ist gemäss Definition auch f glatt.

- ○ f ist zweimal differenzierbar $\implies$ f ist stetig differenzierbar

  Falsch: Die Aussage ist gemäss Bemerkung 4.3.2 wahr.

(b) Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$, die gleichmässig gegen eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergieren. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ○ Die Folge der Ableitungen $(f'_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen f'.

  Falsch: Gleichmässige Konvergenz würde punktweise Konvergenz implizieren. Diese gilt aber nicht im Allgemeinen (siehe das Gegenbeispiel bei der folgenden Antwortmöglichkeit).

○ Die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise in $\mathbb{R}$ gegen f'.

Falsch: Ein Gegenbeispiel für die ersten beiden Antwortmöglichkeiten ist gegeben durch $f_n(x) = \sin(nx)/n$ für $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Die Folge der f_n konvergiert für $n \to \infty$ gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen $f = 0$, aber $f_n'(x) = \cos(nx)$ konvergiert nicht punktweise gegen $f' = 0$ (z.B. ist $f_n'(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$).

● Wenn die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\geq 1}$ gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann gilt $f' = p$.

Richtig: Dies folgt aus Satz 4.4.1.

(c) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(1/2) = 2, \quad f'(1/2) = 0, \quad f''(1/2) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

● Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in $1/2$.

○ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in $1/2$.

○ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in $1/2$.

○ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

Lösung: Da $f'(1/2) = 0$ und die 2. Ableitung in $1/2$ negativ ist (wobei 2 gerade ist), folgt aus Korollar 4.4.7, dass f in $1/2$ ein lokales Maximum besitzt.

(d) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

○ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.

○ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.

● Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.

○ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

Lösung: Da $f'(0) = f''(0) = 0$ und die 3. Ableitung in 0 ungleich 0 ist (wobei 3 ungerade ist), folgt aus Korollar 4.4.7, dass f in 0 kein lokales Extremum besitzt.

(e) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ○ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ○ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.
- ○ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.
- ● Alle oben genannten Fälle sind möglich.

Lösung: x^4+2 besitzt ein lokales Minimum in 0, $-x^4+2$ besitzt ein lokales Maximum in 0, x^5+2 besitzt kein lokales Extremum in 0 (jeweils aufgrund von Korollar 4.4.7), und alle diese Funktionen erfüllen die Voraussetzungen. Also sind alle Fälle möglich.

11.2. n-te Ableitung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die n-te Ableitung für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 3$

Lösung: Wir berechnen die ersten paar Ableitungen unter Verwendung der Regel $(x^n)' = nx^{n-1}$ (Beispiel 4.1.10(1)) und der Linearität der Ableitung (Satz 4.1.9(1)):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2, && (x \in \mathbb{R}) \\ f''(x) &= 12x^2 + 6x - 2, \\ f^{(3)}(x) &= 24x + 6, \\ f^{(4)}(x) &= 24, \\ f^{(5)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Für alle $n \geq 5$ ist $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ für $x \neq \dfrac{1}{3}$

Lösung: Wir verwenden die Regel $(x^a)' = ax^{a-1}$ für negative Exponenten a (Beispiel 4.1.13(2)) und die Kettenregel (Satz 4.1.11) und erhalten für die ersten paar Ableitungen:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-3) \cdot \frac{1}{(3x-1)^2}, && (x \in \mathbb{R} \setminus \{1/3\}) \\ g''(x) &= (-3)^2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{(3x-1)^3}, \\ g^{(3)}(x) &= (-3)^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{(3x-1)^4}, \\ g^{(4)}(x) &= (-3)^4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{(3x-1)^5}. \end{aligned}$$

Wir erkennen das Muster und lesen die allgemeine Formel ab:

$$g^{(n)}(x) = (-3)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{(3x-1)^{n+1}}. \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1/3\}) \tag{1}$$

Wir beweisen diese Formel mit vollständiger Induktion. Für die ersten Werte von n haben wir die Formel oben schon nachgerechnet. Angenommen die Formel (1) ist für $n \in \mathbb{N}$ wahr. Dann folgt für $n+1$:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \left((-3)^n \cdot n! \cdot \frac{1}{(3x-1)^{n+1}}\right)' \\ &= (-3)^n \cdot n! \cdot (-n-1) \cdot 3 \cdot \frac{1}{(3x-1)^{n+2}} \\ &= (-3)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot \frac{1}{(3x-1)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Dies beendet den Induktionsschritt und beweist die Formel (1) für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $h(x) = \sin(x)^2$

Lösung: Die erste Ableitung ist nach der Kettenregel und Beispiel 4.1.8(2) gegeben durch

$$h'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x), \qquad (x \in \mathbb{R})$$

wobei wir für die zweite Gleichheit die Winkelverdoppelungsformel aus Korollar 3.8.3 verwendet haben. Wenn wir nun weiter ableiten, dann erhalten wir durch die Kettenregel in jedem Schritt einen zusätzlichen Faktor 2, und die Winkelfunktionen wechseln zyklisch durch sin, cos, $-\sin$, $-\cos$ (gemäss Beispiel 4.1.8(2)). Das heisst es gilt für $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^{n-1}\sin(2x), & \text{falls } n = 4k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ 2^{n-1}\cos(2x), & \text{falls } n = 4k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ -2^{n-1}\sin(2x), & \text{falls } n = 4k+3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ -2^{n-1}\cos(2x), & \text{falls } n = 4k+4 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

11.3. Darstellung als Potenzreihe. Sei $f(x) = \exp(x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass es Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Lösung: Da für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!},$$

folgt mit $y = x^2$, dass

$$f(x) = \exp(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

wobei

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ \frac{1}{(n/2)!}, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

(b) Folgern Sie, ohne explizit die Ableitungen zu berechnen, dass für $j \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \text{ ungerade ist,} \\ \frac{j!}{(j/2)!}, & \text{falls } j \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

Lösung: Nach Korollar 4.4.3 gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$f^{(j)}(0) = j! a_j,$$

und mit den in Teil (a) bestimmten Koeffizienten ergibt dies genau die zu zeigende Formel.

11.4. Lokale Extrema. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle lokalen Extrema und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt.

(a) $f(x) = x \exp(1/x^2)$ für $x > 0$

Lösung: Wir berechnen die ersten beiden Ableitungen mit der Produktregel (Satz 4.1.9(2)) und der Kettenregel (Satz 4.1.11):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp(1/x^2) + x\exp(1/x^2) \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\exp(1/x^2), \\ f''(x) &= \frac{4}{x^3}\exp(1/x^2) + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\exp(1/x^2) \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{2}{x^3}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)\exp(1/x^2), \end{aligned}$$

für $x \in (0, \infty)$. Die einzige Nullstelle von f' in $(0, \infty)$ ist $x_0 = \sqrt{2}$, da $\exp(1/x^2) > 0$ für alle $x \neq 0$. Nach Satz 4.2.2(3) ist $x_0 = \sqrt{2}$ also der einzige Kandidat für ein lokales Extremum von f. Die zweite Ableitung von f ist für alle $x > 0$ positiv, wie wir aus dem Resultat oben für $f''(x)$ ablesen. Nach Korollar 4.4.8 folgt hieraus, dass $x_0 = \sqrt{2}$ ein lokales Minimum von f ist.

(b) $g(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$ für $x > -2$

Lösung 1: Wir berechnen die erste Ableitung mit der Kettenregel (Satz 4.1.11) und unter Benutzung der Tatsache, dass $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (Beispiel 4.1.13(2) mit $a = 1/2$):

$$g'(x) = \frac{3(x^2 - 1)}{2\sqrt{x^3 - 3x + 3}}$$

für $x > -2$. Wir sehen, dass g' in $(-2, \infty)$ die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat, welche wieder nach Satz 4.2.2(3) die einzigen Kandidaten für lokale Extrema von g in $(-2, \infty)$ sind. Nun berechnen wir die zweite Ableitung von g mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{12x\sqrt{x^3 - 3x + 3} - \frac{9(x^2-1)^2}{\sqrt{x^3-3x+3}}}{4(x^3 - 3x + 3)} = \frac{12x(x^3 - 3x + 3) - 9(x^2 - 1)^2}{4(x^3 - 3x + 3)^{3/2}} \\ &= \frac{3(x^4 - 6x^2 + 12x - 3)}{4(x^3 - 3x + 3)^{3/2}} \end{aligned}$$

für $x > -2$. Für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ erhalten wir durch Einsetzen:

$$g''(x_1) = -\frac{3}{\sqrt{5}} < 0, g''(x_2) \qquad = 3 > 0.$$

Nach Korollar 4.4.8 folgt hieraus, dass $x_1 = -1$ ein lokales Maximum von g und $x_2 = 1$ ein lokales Minimum von g ist.

Lösung 2: In Lösung 1 wurde als vorausgesetzt angenommen, dass g wohldefiniert ist, also dass für $x > -2$ tatsächlich $x^3 - 3x + 3 \geq 0$ gilt und die Quadratwurzel in der Definition von g somit immer existiert. Daher geben wir noch eine zweite Lösung, die dies nicht voraussetzt, sondern auch beweist.

Dazu studieren wir die Hilfsfunktion $h(x) = x^3 - 3x + 3$. Sie hat als Ableitung

$$h'(x) = 3(x^2 - 1)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Ableitung h' ist also für $x < -1$ und $x > 1$ positiv und für $x \in (-1, 1)$ negativ. Nach Korollar 4.2.5 impliziert dies, dass h in $(-\infty, -1]$ und in $[1, \infty)$ streng monoton steigend und in $[-1, 1]$ streng monoton fallend ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass h im Punkt $x_1 = -1$ ein lokales Maximum annimmt und dass $h(x) \geq h(-2) = 1 > 0$ für alle $x \in [-2, -1]$. Des Weiteren folgt aus diesem Monotonieverhalten von h, dass h in $x_2 = 1$ ein lokales Minimum hat und $h(x) \geq h(1) = 1 > 0$ für alle $x \in [-1, \infty)$. Insgesamt haben wir also nicht nur bewiesen, dass $h(x) \geq 1 > 0$ für alle $x \in [-2, \infty)$ ist, sondern auch, dass h in $x_1 = -1$ ein lokales Maximum und in $x_2 = 1$ ein lokales Minimum hat.

Nun müssen wir nicht einmal mehr Ableitungen von g berechnen, sondern können einfach bemerken, dass die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ in $[0, \infty)$ streng monoton steigend ist. Somit sind die lokalen Minima und Maxima von $g = \sqrt{h}$ dieselben wie von h. Also hat g in $x_1 = -1$ ein lokales Maximum und in $x_2 = 1$ ein lokales Minimum.

11.5. Taylorpolynom. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils das Taylorpolynom der Ordnung 3 im Punkt x_0.

(a) $f(x) = \ln(1 + (1 + x)^2), \quad x_0 = -1$

Lösung: Die ersten drei Ableitungen von f sind aufgrund von $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ (Beispiel 4.1.13(1)) und der Kettenregel (Satz 4.1.11) und Quotientenregel (Satz 4.1.9(3)):

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2(1+x)}{1+(1+x)^2}, && (x \in \mathbb{R}) \\
f''(x) &= \frac{2(1+(1+x)^2) - 4(1+x)^2}{(1+(1+x)^2)^2} = -\frac{2x(x+2)}{(1+(1+x)^2)^2}, \\
f'''(x) &= -\frac{4(x+1)(1+(1+x)^2)^2 - 8x(x+1)(x+2)(1+(1+x)^2)}{(1+(1+x)^2)^4} \\
&= -\frac{4(x+1)(1+(1+x)^2) - 8x(x+1)(x+2)}{(1+(1+x)^2)^3} \\
&= \frac{4(x^3+3x^2-2)}{(1+(1+x)^2)^3}.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x_0 = -1$ finden wir:

$$\begin{aligned}
f(-1) &= \ln(1) = 0, & f''(-1) &= 2, \\
f'(-1) &= 0, & f'''(-1) &= 0.
\end{aligned}$$

Daher ist das Taylorpolynom von f der Ordnung 3 im Punkt $x_0 = -1$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
T_3 f(x; -1) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 \\
&= (x+1)^2.
\end{aligned}$$

(b) $g(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x_0 = 0$

Lösung: Die ersten drei Ableitungen von g sind aufgrund von $\sinh'(x) = \cosh(x)$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$ und $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ (vgl. Beispiel 4.2.7) und der Quotientenregel (Satz 4.1.9(3)):

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\cosh(x)^2}, && (x \in \mathbb{R}) \\ g''(x) &= -\frac{2\sinh(x)}{\cosh(x)^3}, \\ g'''(x) &= -\frac{2\cosh(x)^4 - 6\sinh(x)^2\cosh(x)^2}{\cosh(x)^6} \\ &= -\frac{2\cosh(x)^2 - 6\sinh(x)^2}{\cosh(x)^4} \\ &= \frac{2(2\sinh(x)^2 - 1)}{\cosh(x)^4}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $x_0 = 0$ finden wir:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0, & g''(0) &= 0, \\ g'(0) &= 1, & g'''(0) &= -2. \end{aligned}$$

Daher ist das Taylorpolynom von g der Ordnung 3 im Punkt $x_0 = 0$ gegeben durch:

$$T_3 g(x; 0) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}.$$

11.6. Glatter Niveauwechsel. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Lesen Sie im Buch von Königsberger das Beispiel auf Seite 156 in Kapitel 9.6 (LINK) und vollziehen Sie nach, dass f glatt in $\mathbb{R}$ ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Wir definieren die Funktion $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = e^e f(f(1) - f(1-x))$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

(i) F ist glatt in $\mathbb{R}$,

(ii) $F(x) = 0$ für alle $x \leq 0$,

(iii) $F(x) = 1$ für alle $x \geq 1$,

(iv) F ist in $[0, 1]$ streng monoton wachsend.

Lösung: Da $x \mapsto 1-x$ glatt in $\mathbb{R}$ ist (Beispiel 4.3.4(2)) und f gemäss Teil (a) glatt in $\mathbb{R}$ ist, folgt aus Satz 4.3.6, dass $x \mapsto f(1-x)$ glatt in $\mathbb{R}$ ist. Mit Satz 4.3.3(1) ist auch $x \mapsto f(1) - f(1-x)$ glatt in $\mathbb{R}$. Nochmalige Anwendung von Satz 4.3.6 zeigt, dass $x \mapsto f(f(1) - f(1-x))$ glatt in $\mathbb{R}$ ist. Letztlich multiplizieren wir mit der Konstanten e^e und finden, dass F glatt in $\mathbb{R}$ ist (Satz 4.3.3(2)). Dies beweist (i).

Aus $x \leq 0$ folgt, dass $1 - x \geq 1$ und somit $f(1-x) \geq f(1)$, da f monoton wachsend ist. Also ist dann $f(1) - f(1-x) \leq 0$, und es folgt $F(x) = 0$ für $x \leq 0$ gemäss Definition von f. Dies beweist (ii).

Für $x \geq 1$ ist $1 - x \leq 0$ und damit $f(1-x) = 0$. Wegen $f(1) = 1/e$ ergibt sich

$$F(x) = e^e f(f(1)) = \frac{e^e}{e^{1/f(1)}} = \frac{e^e}{e^e} = 1$$

für $x \geq 1$, und somit (iii).

Um (iv) zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \exp(-1/x) > 0$$

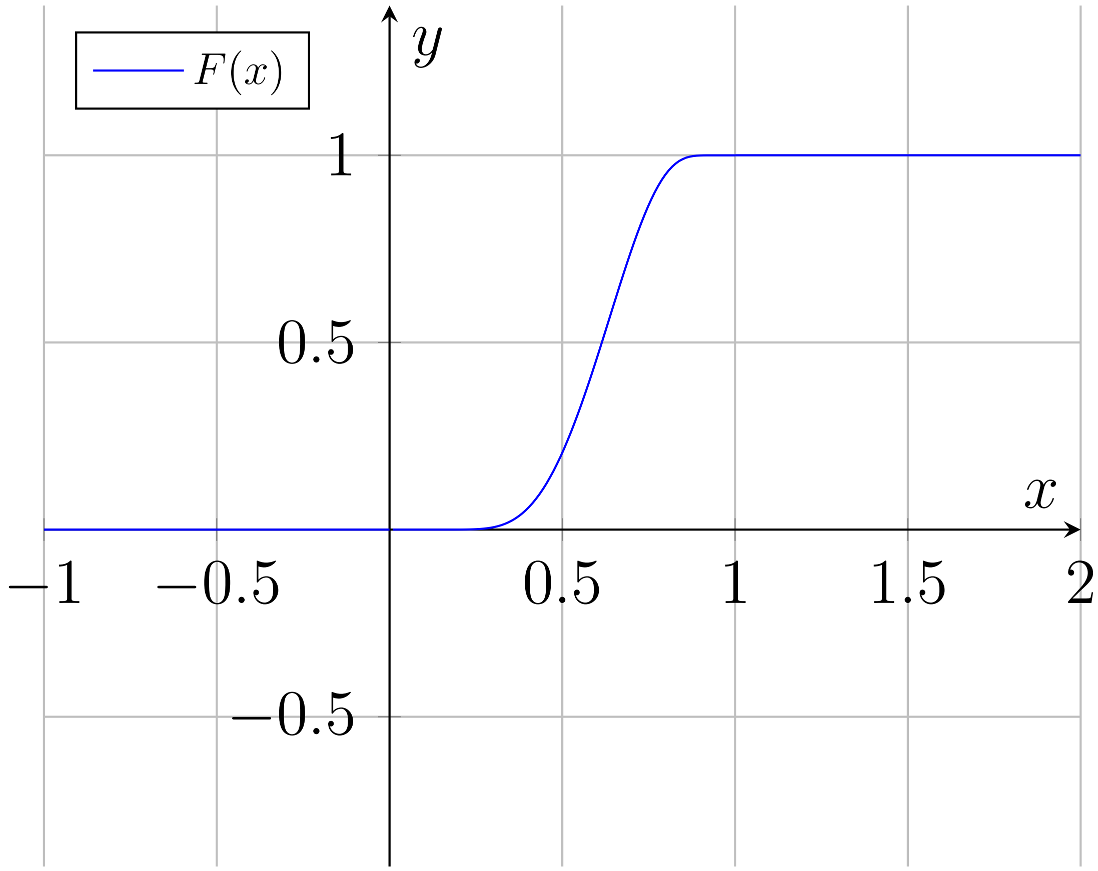
für alle $x > 0$ ist, und somit insbesondere f in $[0, \infty)$ streng monoton wachsend ist (Korollar 4.2.5). Dann leiten wir F unter Verwendung der Kettenregel ab. Wir erhalten

$$F'(x) = e^e f'(f(1) - f(1-x)) f'(1-x) \tag{2}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Für $x \in (0,1)$ ist $1 - x > 0$ und somit $f'(1-x) > 0$. Aus $x > 0$ folgt ausserdem $1 - x < 1$ und somit $f(1) - f(1-x) > 0$, da f in $[0, \infty)$ streng monoton steigend ist, was $f'(f(1) - f(1-x)) > 0$ nach sich zieht. Insgesamt haben wir bewiesen, dass für $x \in (0,1)$ alle Faktoren auf der rechten Seite in (2) positiv sind, und somit $F'(x) > 0$ gilt. Korollar 4.2.5 impliziert also, dass F in $[0,1]$ streng monoton wachsend ist, was zu zeigen war.

(c) Zeichnen Sie den Graphen von F im Intervall $[-1, 2]$ mit einem Computeralgebrasystem Ihrer Wahl.

Lösung: Siehe nächste Seite.


F(x)
y
1
0.5
x
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
−0.5