12.1. MC Fragen: Riemann-Integral. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Welche Eigenschaft einer Funktion auf einem kompakten Intervall impliziert *nicht* die Integrierbarkeit?

- ● Beschränktheit

  Richtig: Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

  aus Beispiel 5.1.6 ist beschränkt aber nicht integrierbar.

- ○ Monotonie

  Falsch: Siehe Satz 5.2.8.

- ○ Stetigkeit

  Falsch: Siehe Satz 5.2.7.

- ○ Differenzierbarkeit

  Falsch: Differenzierbare Funktionen sind stetig (Korollar 4.1.5) und somit integrierbar (Satz 5.2.7).

(b) Was ist der Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$?

○ 0 ○ $\frac{1}{2}$ ● 1 ○ 2

Lösung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\int_a^b x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |x| \,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{0} (-x) \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} x \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}\left(0^2 - (-1)^2\right) + \frac{1}{2}\left(1^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

wobei für die Aufteilung des Integrals auf $[-1,0]$ und $[0,1]$ die Bemerkung 5.2.9 verwendet wurde.

(c) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, integrierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\frac{\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x}{b-a} = f(\xi).$$

- ○ Die Aussage ist immer wahr.

  Falsch: Siehe das Gegenbeispiel zur nächsten Antwortmöglichkeit.

- ○ Die Aussage ist wahr, wenn f monoton ist.

  Falsch: Ein Gegenbeispiel ist:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

  Diese Funktion ist monoton steigend, aber es gibt kein $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ (vgl. Beispiel 5.3.5 im Skript).

- ● Die Aussage ist wahr, wenn f stetig ist.

  Richtig: Dies ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 5.3.4).

- ○ Keine der obigen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

(d) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche der folgenden Formeln ist richtig?

- ○ $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$
- ○ $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b + \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
- ● $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$
- ○ $\displaystyle\int_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

Lösung: Man erhält die richtige Antwort aus dem Satz über partielle Integration (Satz 5.4.5 im Skript), wenn man f und g vertauscht.

(e) Seien $a < b$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche der folgenden Formeln ist richtig?

- ○ $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- ○ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$
- ● $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$
- ○ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$

Lösung: Man erhält die richtige Antwort aus der Substitutionsregel (Satz 5.4.6) mit $g = \phi$.

(f) Was ist die Ableitung nach x von $G(x) = \int_{x^2}^{1} \sin(t)^2 \cos(t)^2 \,\mathrm{d}t$?

- ○ $G'(x) = \int_{2x}^{1} \sin(t)^2 \cos(t)^2 \,\mathrm{d}t$
- ○ $G'(x) = -\sin(x^2)^2 \cos(x^2)^2$
- ○ $G'(x) = 2x \sin(x^2)^2 \cos(x^2)^2$
- ● $G'(x) = -2x \sin(x^2)^2 \cos(x^2)^2$

Lösung: Sei F eine Stammfunktion von $t \mapsto \sin(t)^2 \cos(t)^2$, d.h. $F'(t) = \sin(t)^2 \cos(t)^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese existiert nach dem ersten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (Satz 5.4.1). Der zweite Teil des Hauptsatzes (Satz 5.4.3) impliziert

$$G(x) = \int_{x^2}^{1} \sin(t)^2 \cos(t)^2 \,\mathrm{d}t = F(1) - F(x^2).$$

Mit der Kettenregel folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = -F'(x^2)2x = -2x \sin(x^2)^2 \cos(x^2)^2.$$

(Man vergleiche dies mit der zweiten Clicker-Frage in der Vorlesung am 15.5.24.)

12.2. Integral einer Treppenfunktion.

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f(x) = c$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie anhand der Definition, dass f auf $[a,b]$ integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a).$$

Bemerkung: Es wird hier nicht angenommen, dass $f(a)$ und $f(b)$ auch gleich c sind.

Lösung: Sei $M := \max\{|f(a)|, |f(b)|, |c|\}$. Dann gilt $|f(x)| \le M$ für alle $x \in [a,b]$. Insbesondere ist f beschränkt.

Wir betrachten $P_n = \{a, a+1/n, b-1/n, b\}$. Wenn $n \in \mathbb{N}$ gross genug ist, dann gilt $a < a+1/n < b-1/n < b$, sodass P_n eine Partition von $[a,b]$ ist. Die Partition ist so gewählt, dass die Länge der Teilintervalle $[a, a+1/n]$ und $[b-1/n, b]$, in denen f von c abweichende Werte annehmen kann, für $n \to \infty$ gegen 0 konvergieren. Dann gilt für die Unter- und Obersummen:

$$\begin{aligned} s(f, P_n) &= \underbrace{\inf_{a \le x \le a+1/n} f(x)}_{\ge -M} \cdot \frac{1}{n} + \underbrace{\inf_{a+1/n \le x \le b-1/n} f(x)}_{=c} \cdot \left(b - a - \frac{2}{n}\right) + \underbrace{\inf_{b-1/n \le x \le b} f(x)}_{\ge -M} \cdot \frac{1}{n} \\ &\ge c \cdot \left(b - a - \frac{2}{n}\right) - \frac{M}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(f,P_n) &= \underbrace{\sup_{a\le x\le a+1/n} f(x)}_{\le M}\cdot\frac{1}{n} + \underbrace{\sup_{a+1/n\le x\le b-1/n} f(x)}_{=c}\cdot\left(b-a-\frac{2}{n}\right) + \underbrace{\sup_{b-1/n\le x\le b} f(x)}_{\le M}\cdot\frac{1}{n} \\ &\le c\cdot\left(b-a-\frac{2}{n}\right)+\frac{M}{2n} \end{aligned}$$

Es gilt also für das Unter- und Oberintegral die Ungleichungskette

$$c\cdot\left(b-a-\frac{2}{n}\right)-\frac{M}{2n}\le s(f,P_n)\le s(f)\le S(f)\le S(f,P_n)\le c\cdot\left(b-a-\frac{2}{n}\right)+\frac{M}{2n}$$

und da die linke und die rechte Seite für $n\to\infty$ gegen $c\cdot(b-a)$ konvergieren, folgt $s(f)=S(f)=c\cdot(b-a)$. Dies zeigt die Integrierbarkeit von f und dass $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c\cdot(b-a)$.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^4 \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x,$$

wobei $\lfloor x\rfloor$ die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet.

Lösung: Da

$$\lfloor x\rfloor = \begin{cases} 0, & x\in[0,1),\\ 1, & x\in[1,2),\\ 2, & x\in[2,3),\\ 3, & x\in[3,4),\end{cases}$$

erhalten wir durch Aufteilen des Integrals (Bemerkung 5.2.9) und Verwendung von Teil (a), dass

$$\begin{aligned} \int_0^4 \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x+\int_1^2 \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x+\int_2^3 \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x+\int_3^4 \lfloor x\rfloor\,\mathrm{d}x \\ &= 0\cdot(1-0)+1\cdot(2-1)+2\cdot(3-2)+3\cdot(4-3) \\ &= 0+1+2+3=6. \end{aligned}$$

12.3. Stammfunktionen.

(a) Seien $I,J\subset\mathbb{R}$ Intervalle und $\varphi\colon I\to\mathbb{R}$ und $\psi\colon J\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass $\psi(J)\subset I$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x\mapsto \varphi'(\psi(x))\psi'(x),\quad x\in J.$$

Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

(b) $(x^2 - 2x + 2)^{2024}(2x - 2), \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $-e^{1/x}\dfrac{1}{x^2}, \quad x \in (0, \infty)$

(d) $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

(e) $\tan(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$

Lösung:

(a) Aus $\psi(J) \subset I$ folgt, dass die Komposition $\varphi \circ \psi$ in J definiert ist. Die Kettenregel lautet:

$$(\varphi \circ \psi)'(x) = \varphi'(\psi(x))\psi'(x), \quad x \in J.$$

Somit ist $\varphi \circ \psi$ eine Stammfunktion von $x \mapsto \varphi'(\psi(x))\psi'(x)$ in J.

Damit können wir die in (b)–(e) gesuchten Stammfunktionen einfach berechnen:

(b) Für $\varphi(x) = \frac{1}{2025}x^{2025}$ gilt $\varphi'(x) = x^{2024}$ $(x \in \mathbb{R})$ und für $\psi(x) = x^2 - 2x + 2$ gilt $\psi'(x) = 2x - 2$ $(x \in \mathbb{R})$. Somit erhalten wir mit (a) die Stammfunktion $x \mapsto \frac{1}{2025}(x^2 - 2x + 2)^{2025}$ in $\mathbb{R}$.

(c) Für $\varphi(x) = e^x$ gilt $\varphi'(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ und für $\psi(x) = \frac{1}{x}$ gilt $\psi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$. Somit erhalten wir mit (a) die Stammfunktion $x \mapsto e^{1/x}$ in $(0, \infty)$.

(d) Für $\varphi(x) = \sqrt{x}$ gilt $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x \in (0, \infty))$ und für $\psi(x) = 1 + x^2$ gilt $\psi'(x) = 2x$ $(x \in \mathbb{R})$. Somit erhalten wir mit (a) die Stammfunktion $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ in $\mathbb{R}$. Man beachte, dass wir hier verwendet haben, dass $1 + x^2 \geq 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, und somit $1 + x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ in $(0, \infty)$ enthalten ist, wo $\sqrt{x}$ differenzierbar ist.

(e) Es gilt $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ für $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Für $\varphi(x) = -\ln(x)$ gilt $\varphi'(x) = -\frac{1}{x}$ $(x \in (0, \infty))$ und für $\psi(x) = \cos(x)$ gilt $\psi'(x) = -\sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Somit erhalten wir mit (a) die Stammfunktion $x \mapsto -\ln(\cos(x))$ in $(-\pi/2, \pi/2)$. Man beachte, dass wir hier verwendet haben, dass $\cos(x)$ für $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ positiv ist, und somit im Definitionsbereich $(0, \infty)$ von ln liegt (wo ln auch differenzierbar ist).

12.4. Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen.

(a) Lesen Sie die Definition des Flächeninhalts unter dem Graphen einer Funktion in Anwendung 5.4.7 im Skript. Seien nun $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte, integrierbare Funktionen mit $g \leq f$. Welche Formel ergibt den Flächeninhalt des Gebiets

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

zwischen den Graphen der Funktionen g und f?

Lösung: Die Definition in der Anwendung 5.4.7 lautet: Wenn $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ beschränkt, integrierbar ist, dann ist der Flächeninhalt des Gebiets

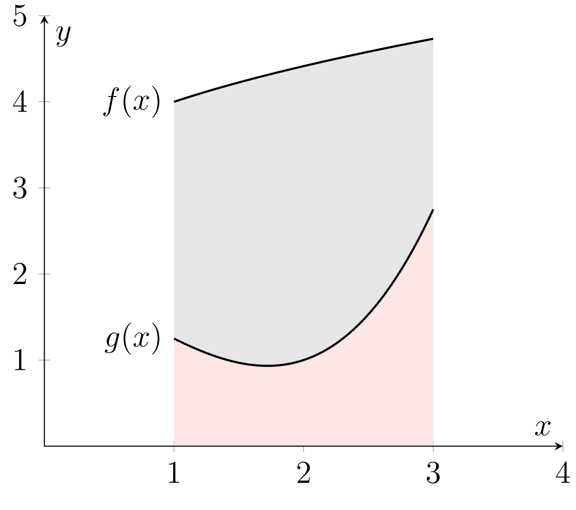
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

zwischen der x-Achse und dem Graphen von f gegeben durch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

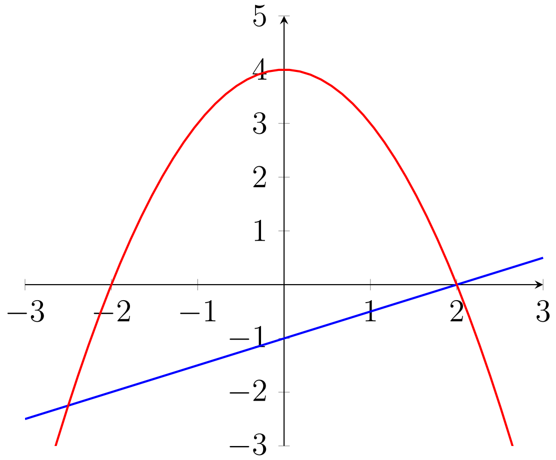
Betrachten wir nun den allgemeineren Fall in dieser Aufgabe. Da f, g beschränkt sind, können wir durch Addition einer geeigneten Konstanten $M \geq 0$ zu f und g annehmen, dass $f, g \geq 0$ sind. Geometrisch entspricht dies einer vertikalen Verschiebung der Graphen, was am Flächeninhalt zwischen f und g nichts ändert. Dann ist der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen von f gegeben durch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und derjenige zwischen der x-Achse und dem Graphen von g durch $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Da $g \leq f$ vorausgesetzt wurde, erhalten wir den gesuchten Flächeninhalt des Gebiets zwischen den Graphen von f und g also durch die Differenz:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Die folgende Skizze illustriert dies. Die hellrote Fläche hat den Flächeninhalt $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Die hellrote und die hellgraue Fläche zusammen haben den Flächeninhalt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Also ist der Flächeninhalt der hellgrauen Fläche allein gegeben durch die Differenz von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.



(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebiets, das durch die blaue Gerade und die rote Parabel begrenzt wird, wie im Bild unten gezeigt.



Lösung: Da die rote Parabel, die wir mit f bezeichnen, durch die Punkte $(-2, 0)$ und $(2, 0)$ geht, hat sie die Form $f(x) = c(x-2)(x+2)$. Da sie auch durch $(0, 4)$ geht, schliessen wir, dass $c = -1$. Also hat f die Form

$$f(x) = -x^2 + 4.$$

Die blaue Gerade, die wir mit g bezeichnen, hat die Steigung $\frac{1}{2}$ und an der Stelle $x = 0$ den Wert -1, also hat sie die Form

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 1.$$

Seien a und b, $a < b$, die zwei Punkte, in denen sich f und g schneiden. Die Fläche A, die durch f und g begrenzt wird, ist dann gemäss Teil (a) gegeben durch

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x.$$

Es gilt

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x = \int_a^b \left(-x^2 - \frac{1}{2}x + 5\right)\, \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 5x\right)\Big|_a^b,$$

wobei wir im letzten Schritt den zweiten Teil des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung verwendet haben (Satz 5.4.3). Um a und b zu finden, müssen wir die Gleichung $f(x) = g(x)$ lösen. Sie ist zu

$$x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0$$

äquivalent. Mit der quadratischen Lösungsformel finden wir

$$a = -\frac{5}{2}, \qquad b = 2.$$

(Alternativ zur Lösungsformel kann man auch bemerken, dass $b = 2$ schon aus dem Bild klar ist, und das Produkt der Nullstellen von $x^2 + \frac{1}{2}x - 5$ den konstanten Term -5 ergeben muss, sodass direkt $a = -\frac{5}{2}$ folgt.)

Wir schliessen, dass der gesuchte Flächeninhalt gegeben ist durch

$$\begin{aligned} A &= \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 5x\right)\Big|_{-\frac{5}{2}}^{2} = \left(-\frac{8}{3} - 1 + 10\right) - \left(\frac{125}{24} - \frac{25}{16} - \frac{25}{2}\right) \\ &= \frac{19}{3} + \frac{425}{48} = \frac{243}{16}. \end{aligned}$$

12.5. Integrale von ungeraden Funktionen. Sei $a > 0$ und $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, dass f *ungerade* ist, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitutionsregel auf geeignete Weise.

Lösung: Nach Bemerkung 5.2.9 können wir das Integral aufteilen:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir verwenden nun die Substitutionsregel (Satz 5.4.6) mit der Funktion $\phi(t) = -t$ und erhalten zusammen mit der Annahme, dass f ungerade ist:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(-x)\cdot(-1)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(-a)}^{\phi(0)} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

12.6. Rekursive Berechnung eines Integrals. Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,\mathrm{d}x.$$

(a) Bestimmen Sie durch partielle Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$.

Lösung: Mit einer partiellen Integration (Satz 5.4.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} I(p+1,q) &= \int_0^1 x^{p+1}\,(1-x)^q\,\mathrm{d}x \\ &= -x^{p+1}\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\bigg|_0^1 + \frac{p+1}{q+1}\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{p+1}{q+1}\,I(p,q+1). \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

Lösung: Für $q = 0$ können wir direkt berechnen:

$$I(p,0) = \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

Die Idee ist nun, wenn $q \geq 1$ ist, die Rekursionsrelation aus (a) zu verwenden, um von $I(p,q)$ zu $I(p+1,q-1)$ überzugehen:

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1,q-1).$$

Wir führen dies nun so oft durch, bis wir rechts den Term $I(p+q,0)$ haben:

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \frac{q}{p+1} I(p+1,q-1) = \frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)} I(p+2,q-2) \\ &= \cdots = \frac{q(q-1)\cdots 1}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)} I(p+q,0) \\ &= \frac{p!\,q!}{(p+q)!} I(p+q,0). \end{aligned}$$

Da nach der Rechnung am Anfang $I(p+q,0) = \frac{1}{p+q+1}$ gilt, folgt hieraus das gewünschte Ergebnis

$$I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q)!} I(p+q,0) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$