13.1. MC Fragen: Substitution bei unbestimmten Integralen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende unbestimmte Integral zu berechnen?

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

- ● $y = \sin(x)$
- ○ $y = \cos(x)$
- ○ $y = 1 + \sin(x)^2$
- ○ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

Lösung: Sei $y = \sin(x)$. Dann ist $\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ und

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \arctan(y) + C = \arctan(\sin(x)) + C.$$

(b) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende unbestimmte Integral zu berechnen?

$$\int \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^7}\,\mathrm{d}x$$

- ● $y = \sin(x)$
- ○ $y = \cos(x)$
- ○ $y = \sin(x)^7$
- ○ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

Lösung: Sei $y = \sin(x)$. Dann ist $\cos(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ und

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^7}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\sin(x)^2}{\sin(x)^7}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-y^2}{y^7}\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{6y^6} + \frac{1}{4y^4} + C \\ &= \frac{3\sin(x)^2 - 2}{12\sin(x)^6} + C.\end{aligned}$$

(c) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende unbestimmte Integral zu berechnen?

$$\int \frac{e^{\pi x} - 1}{e^{2\pi x} + e^{\pi x}}\,\mathrm{d}x$$

- ○ $y = e^x$
- ● $y = e^{\pi x}$
- ○ $y = e^{2\pi x}$
- ○ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

Lösung: Sei $y = e^{\pi x}$. Dann ist $\pi e^{\pi x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$ und

$$\int \frac{e^{\pi x}-1}{e^{2\pi x}+e^{\pi x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int \frac{e^{\pi x}-1}{e^{3\pi x}+e^{2\pi x}}\pi e^{\pi x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int \frac{y-1}{y^3+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Das neue Integral in y kann man nun mit der Partialbruchzerlegung $\frac{y-1}{y^3+y^2} = \frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} - \frac{2}{y+1}$ berechnen:

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{y-1}{y^3+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2\ln|y|}{\pi} + \frac{1}{\pi y} - \frac{2\ln|y+1|}{\pi} + C.$$

Daher ist

$$\int \frac{e^{\pi x}-1}{e^{2\pi x}+e^{\pi x}}\,\mathrm{d}x = 2x + \frac{e^{-\pi x}}{\pi} - \frac{2\ln(e^{\pi x}+1)}{\pi} + C.$$

13.2. Elementare Integrale. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int (x^{2/3}-2)(x^2+3)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_3^4 (e^x-1)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{4-x^3+x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Eine Stammfunktion von $\frac{1}{x^2+1}$ ist $\arctan(x)$ und $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, daher gilt

$$\int_0^1 \frac{2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = 2\arctan(x)\Big|_0^1 = 2(\arctan(1)-\arctan(0)) = \frac{\pi}{2}.$$

Eine Stammfunktion von e^x ist e^x, daher gilt

$$\int_3^4 (e^x-1)\,\mathrm{d}x = (e^x-x)\Big|_3^4 = e^4-4-(e^3-3) = e^4-e^3-1.$$

Für das erste unbestimmte Integral haben wir:

$$\begin{aligned}\int (x^{2/3}-2)(x^2+3)\,\mathrm{d}x &= \int \left(x^{8/3}+3x^{2/3}-2x^2-6\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{3x^{11/3}}{11} + \frac{9x^{5/3}}{5} - \frac{2x^3}{3} - 6x + C.\end{aligned}$$

Für das zweite unbestimmte Integral haben wir:

$$\int \frac{4 - x^3 + x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \left(4x^{-1} - x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x = 4\ln|x| - \frac{x^3}{3} + x + C.$$

13.3. Integration durch Substitution. Berechnen Sie die folgenden Integrale durch geeignete Substitutionen:

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int (x^4+4x+4)^{2024}(4x^3+4)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{\pi/4} \cos(2x)^3\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos(\cos(x))\sin(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 x\tan(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{3+4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Mit $\phi(x) = x^2+x+1$ gilt $\phi'(x) = 2x+1$ und daher mit der Substitutionsregel (Satz 5.4.6):

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\phi(x)}\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(0)}^{\phi(1)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t|\Big|_1^3 = \ln(3) - \ln(1) = \ln(3).$$

Für das zweite bestimmte Integral schreiben wir $\cos(2x)^2 = 1 - \sin(2x)^2$ und erhalten:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \cos(2x)^3\,dx &= \int_0^{\pi/4} \cos(2x)(1-\sin(2x)^2)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} \sin(2x)^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Nun verwenden wir für das linke Integral die Substitution $\phi(x) = 2x$ und für das rechte $\psi(x) = \sin(2x)$ und erhalten mit der Substitutionsregel (Satz 5.4.6):

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \cos(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(t)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Für das dritte bestimmte Integral verwenden wir $\phi(x) = \cos(x^2)$. Dann gilt $\phi'(x) = -2x\sin(x^2)$ und daher mit der Substitutionsregel (Satz 5.4.6):

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\tan(x^2)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\phi(x)}\phi'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{\phi(0)}^{\phi(1)} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln|t|}{2}\Big|_1^{\cos(1)} \\ &= -\frac{\ln(\cos(1))}{2}.\end{aligned}$$

Für das erste unbestimmte Integral substituieren wir $u = x^4 + 4x + 4$. Dann ist $\mathrm{d}u = (4x^3 + 4)\,\mathrm{d}x$ und

$$\int (x^4 + 4x + 4)^{2024}(4x^3 + 4)\,\mathrm{d}x = \int u^{2024}\,\mathrm{d}u = \frac{u^{2025}}{2025} + C = \frac{(x^4 + 4x + 4)^{2025}}{2025} + C.$$

Für das zweite unbestimmte Integral substituieren wir $u = \cos(x)$. Dann ist $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ und

$$\int \cos(\cos(x))\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\int \cos(u)\,\mathrm{d}u = -\sin(u) + C = -\sin(\cos(x)) + C.$$

Mit der Substitution $u = 3 + 4x^2$, $\mathrm{d}u = 8x\,\mathrm{d}x$, erhalten wir für das dritte unbestimmte Integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{3 + 4x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{u}}{2} + C = \frac{\sqrt{3 + 4x^2}}{2} + C.$$

13.4. Partielle Integration.

(a) Berechnen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration:

$$\int_0^{\pi/2} x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int x^2 e^x\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{\pi/2} e^{6x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int \sinh(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Das erste bestimmte Integral berechnen wir wie folgt:

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{x^2}_{f(x)}\underbrace{\cos(2x)}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left.\frac{x^2\sin(2x)}{2}\right|_0^{\pi/2}}_{=0} - \int_0^{\pi/2} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/2} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x.$$

Erneute partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{\sin(2x)}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x &= \underbrace{-\left.\frac{x\cos(2x)}{2}\right|_0^{\pi/2}}_{=\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2x)\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

Für das zweite bestimmte Integral erinnern wir uns daran, dass $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Damit können wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \underbrace{x}_{g'(x)} \underbrace{\arctan(x)}_{f(x)}\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\frac{x^2\arctan(x)}{2}\bigg|_0^1}_{=\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\frac{x^2}{1+x^2}}_{=1-\frac{1}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 1\,\mathrm{d}x}_{=1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{=\arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Für das dritte bestimmte Integral $I = \int_0^{\pi/2} e^{6x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$ integrieren wir partiell, bis wir auf der rechten Seite wieder das gesuchte Integral I stehen haben:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{6x}}_{f(x)} \underbrace{\sin(3x)}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\frac{e^{6x}\cos(3x)}{3}\bigg|_0^{\pi/2}}_{=\frac{1}{3}} + 2\int_0^{\pi/2} e^{6x}\cos(3x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\underbrace{e^{6x}\sin(3x)\bigg|_0^{\pi/2}}_{=-e^{3\pi}} - 4\underbrace{\int_0^{\pi/2} e^{6x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x}_{=I} \\
&= \frac{1-2e^{3\pi}}{3} - 4I.
\end{aligned}$$

Umstellen nach I ergibt also:

$$I = \frac{1-2e^{3\pi}}{15}.$$

Für das erste unbestimmte Integral integrieren wir zweimal partiell:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^2}_{f(x)} \underbrace{e^x}_{g'(x)}\,\mathrm{d}x &= x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\left(xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= (x^2-2x+2)e^x + C.
\end{aligned}$$

Für das zweite unbestimmte Integral erinnern wir uns an $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ und integrieren partiell, indem wir einen Faktor 1 hinzufügen:

$$\int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\arcsin(x)}_{f(x)} \,\mathrm{d}x = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Zur Bestimmung des letzten Integrals substituieren wir $u = 1 - x^2$, $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,\mathrm{d}x &= x\arcsin(x) + \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = x\arcsin(x) + \sqrt{u} + C \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Für das dritte unbestimmte Integral erinnern wir uns an $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ und berechnen:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\sinh(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sinh(x)}_{g'(x)} \,\mathrm{d}x &= \sinh(x)\cosh(x) - \int \underbrace{\cosh(x)^2}_{=1+\sinh(x)^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \sinh(x)\cosh(x) - x - \int \sinh(x)^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Stellen wir nach dem gesuchten Integral um, erhalten wir:

$$\int \sinh(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh(x)\cosh(x) - x}{2} + C$$

(b) Verwenden Sie eine Methode wie in der Vorlesung, um das folgende unbestimmte Integral zu berechnen (vgl. Beispiel 5.9.1(5) im Skript):

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Sei $J_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$. In der Vorlesung haben wir durch partielle Integration des Integrals J_1 eine Beziehung zwischen J_1 und J_2 hergeleitet, die uns letztlich unter Verwendung von $J_1 = \arctan(x)$ erlaubt hat, die folgende Formel für J_2 zu finden:

$$J_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C.$$

Wiederholen wir nun dasselbe Vorgehen ausgehend von J_2. Wir integrieren partiell mit Sei $g'(x) = 1$ und $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$:

$$J_2 = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^2} + 2\int \frac{2x^2}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x.$$

Wir schreiben den Zähler im letzten Integral als $2x^2 = 2(1+x^2) - 2$. Dann ist

$$\int \frac{2x^2}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x}_{2J_2} - \underbrace{\int \frac{2}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x}_{=2J_3},$$

also

$$J_2 = \frac{x}{(1+x^2)^2} + 4J_2 - 4J_3 \implies J_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3J_2}{4}.$$

Hier können wir nun die Formel für J_2 aus der Vorlesung einsetzen und erhalten das gesuchte Integral

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3\arctan(x)}{8} + C \\ &= \frac{x(3x^2+5)}{8(1+x^2)^2} + \frac{3\arctan(x)}{8} + C. \end{aligned}$$

13.5. Partialbruchzerlegung. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale durch Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{x+7}{x^2(x+2)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{x^3-6x^2+11x-6}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung: Für das erste Integral berechnen wir A, B und C, so dass

$$\frac{x+7}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2}{x^2(x+2)},$$

also nach Multiplikation mit dem Nenner:

$$x + 7 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + C &= 0, \\ 2A + B &= 1, \\ 2B &= 7. \end{aligned}$$

Auflösen von unten nach oben ergibt $B = \frac{7}{2}$, $A = -\frac{5}{4}$ und $C = \frac{5}{4}$. Daher gilt

$$\int \frac{x+7}{x^2(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{-5}{4x} + \frac{7}{2x^2} + \frac{5}{4(x+2)}\right)\mathrm{d}x = -\frac{5\ln|x|}{4} - \frac{7}{2x} + \frac{5\ln|x+2|}{4} + C.$$

Für das zweite Integral müssen wir zunächst den Nenner $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ faktorisieren. Da $x_1 = 1$ eine Nullstelle des Nenners ist, können wir durch Polynomdivision den Linearfaktor $(x-1)$ abspalten:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6.$$

Die zwei Nullstellen von $x^2 - 5x + 6$ sind nach der quadratischen Lösungsformel

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} \implies x_2 = 2,\ x_3 = 3.$$

Also ist der Nenner gegeben durch $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Wir machen also den Ansatz:

$$\frac{1}{Q(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}.$$

Nach Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2) \\ &= (A+B+C)x^2 + (-5A-4B-3C)x + (6A+3B+2C) \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0, \\ 5A + 4B + 3C &= 0, \\ 6A + 3B + 2C &= 1. \end{aligned}$$

Wenn man dieses lineare Gleichungssystem auflöst (zum Beispiel durch Gauss-Elimination), erhält man $A = C = \frac{1}{2}$, $B = -1$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\, \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{2(x-3)} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln|x-1|}{2} - \ln|x-2| + \frac{\ln|x-3|}{2} + C. \end{aligned}$$

Für das dritte Integral machen wir den Ansatz

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}.$$

Nach Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir:

$$\begin{aligned} 1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1) \\ &= (A+B)x^4 + (-B+C)x^3 + (2A+B-C+D)x^2 \\ &\qquad + (-B+C-D+E)x + (A-C-E). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A+B&=0,\\ -B+C&=0,\\ 2A+B-C+D&=0,\\ -B+C-D+E&=0,\\ A-C-E&=1. \end{aligned}$$

Hier können wir zur Vereinfachung bemerken, dass die zweite Gleichung $B = C$ impliziert. Wenn wir dies in die vierte Gleichung einsetzen, folgt auch $D = E$. Damit erhalten wir das vereinfachte System

$$\begin{aligned} A+B&=0,\\ 2A+D&=0,\\ A-B-D&=1. \end{aligned}$$

Wenn man dieses lineare Gleichungssystem nun auflöst (zum Beispiel durch Gauss-Elimination), erhält man $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4} = C$, $D = -\frac{1}{2} = E$. Daher ist

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{x+1}{4(x^2+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Berechnen wir die nun auftretenden Integrale getrennt:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x &= \ln|x-1| + C,\\ \int \frac{x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{\ln(x^2+1)}{2} + \arctan(x) + C,\\ \int \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C\\ &= \frac{x-1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C, \end{aligned}$$

wobei wir zweimal die Substitution $u = x^2+1$, $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, verwendet und uns an das Integral $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$ aus der Vorlesung (oder Aufgabe 13.4(b)) erinnert haben.

Setzen wir alles zusammen, erhalten wir also schliesslich:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{\ln|x-1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{8} - \frac{1}{4}\arctan(x) \\ &\qquad - \frac{x-1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4}\arctan(x) + C \\ &= \frac{1-x}{4(x^2+1)} + \frac{\ln|x-1|}{4} - \frac{\ln(x^2+1)}{8} - \frac{1}{2}\arctan(x) + C.\end{aligned}$$

13.6. Integral-Trainer. Üben Sie im Integral-Trainer auf Moodle selbstständig weitere Integrale, bis Sie genügend Routine im Integrieren haben. (LINK)