**14.1. MC Fragen: Integrale, Summen, Konvergenz von Funktionenfolgen.**
Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

**(a)** Sei $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall von $[1,\infty)$ beschränkt und integrierbar ist. Unter welcher der folgenden Bedingungen konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)?$$

○ $f$ ist monoton fallend

Falsch: Sei $f(x) = 1/x$. Dann ist $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend, aber $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ konvergiert nicht.

○ $f$ ist beschränkt

Falsch: Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist auf $[1,\infty)$ beschränkt und ist daher nochmals ein Gegenbeispiel.

○ $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert

Falsch: Sei

$$f\colon [1,\infty) \to [0,\infty), \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ und hat den Wert 0. Allerdings divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, da $f(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

● Keine der obigen Bedingungen allein impliziert die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

**(b)** Gilt die Gleichheit

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}?$$

● Ja

○ Nein

**Lösung:** Um die angegebene Gleichung zu analysieren, zerlegen wir das Integral in Intervalle, auf denen die Funktion $\lfloor x \rfloor$ konstant ist. Das Integral kann dann als Summe von Integralen über diese Intervalle ausgedrückt werden:

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\sin(\pi x)}{k}\,\mathrm{d}x.$$

Das Integral von $\sin(\pi x)$ können wir direkt berechnen:

$$\int_k^{k+1} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big]_k^{k+1} = -\frac{1}{\pi}(\underbrace{\cos(\pi(k+1))}_{=(-1)^{k+1}} - \underbrace{\cos(\pi k)}_{=(-1)^k}) = \frac{2}{\pi}(-1)^k.$$

Somit wird das gesamte Integral zu:

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot\frac{2}{\pi}(-1)^k = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}$$

**(c)** Seien $g, g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin(2\pi x^{-1}), & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

und

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0\le t<\frac{1}{n}} g(t), & 0 \le x < \frac{1}{n}, \\ \inf\limits_{\frac{1}{n}\le t<\frac{2}{n}} g(t), & \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n}, \\ \dots \\ \inf\limits_{\frac{j}{n}\le t<\frac{j+1}{n}} g(t), & \frac{j}{n} \le x < \frac{j+1}{n}, \\ \dots \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n}\le t\le 1} g(t), & \frac{n-1}{n} \le x \le 1. \end{cases} \qquad (n \ge 2).$$

Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) $\exists x_0 \in (0,1)$ mit $g'(x_0) = 0$.

● Wahr

○ Falsch

**Lösung:** Die Ableitung von $g$ ist für $x \in (0,1)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x^3 \sin(2\pi x^{-1}) + x^4 \cos(2\pi x^{-1}) \cdot 2\pi \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= 2x^2\Big(2x\sin(2\pi x^{-1}) - \pi\cos(2\pi x^{-1})\Big). \end{aligned}$$

Wenn $x_1 \in (0,1)$ so gewählt ist, dass $\sin(2\pi x_1^{-1}) = 1$ und $\cos(2\pi x_1^{-1}) = 0$, dann ist $g'(x_1) > 0$, und wenn $x_2 \in (0,1)$ so gewählt ist, dass $\sin(2\pi x_2^{-1}) = 0$ und $\cos(2\pi x_2^{-1}) = 1$, dann ist $g'(x_2) < 0$. Somit folgt die Existenz einer Nullstelle $x_0$ von $g'$ zwischen $x_1$ und $x_2$ aufgrund der Stetigkeit aus dem Zwischenwertsatz.

(ii) Die Funktionenfolge $(g_n)_{n\geq 2}$ konvergiert in $[0,1]$ gleichmässig gegen $g$.

● Wahr

○ Falsch

**Lösung:** Aus der Formel für die Ableitung von $g$ in der Lösung zu (i) folgt, dass $g'$ in $(0,1)$ beschränkt ist. Das heisst es gibt eine Konstante $M \geq 0$, so dass $|g'(x)| \leq M$ für alle $x \in (0,1)$. Dann impliziert Korollar 4.2.5(7), dass

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq M|t_1 - t_2|$$

für alle $t_1, t_2 \in [0,1]$. Aus der Definition von $g_n$ folgt damit, dass

$$|g(x) - g_n(x)| \leq \frac{M}{n}$$

für alle $n \geq 2$ und alle $x \in [0,1]$. Dies impliziert, dass $(g_n)_{n\geq 2}$ gleichmässig in $[0,1]$ gegen $g$ konvergiert.

(iii) $g_n$ und $g$ sind integrierbar und $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ für jedes $n \geq 2$.

● Wahr

○ Falsch

**Lösung:** Die Funktion $g$ ist auf ganz $[0,1]$ stetig, also integrierbar (Satz 5.2.7). (Die Stetigkeit in $(0,1]$ ist dabei klar, und dass $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 = g(0)$ zeigt man analog wie in Aufgabe 8.6.) Die Funktionen $g_n$ sind stückweise konstant und daher auch integrierbar (vgl. Aufgabe 12.2 und Bemerkung 5.2.9 im Skript). Da $g_n \leq g$ für alle $n \geq 2$, folgt aus der Monotonie des Integrals (Satz 5.3.1), dass $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

(iv) $g_n$ und $g$ sind integrierbar und es gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

● Wahr

○ Falsch

**Lösung:** Für die Integrierbarkeit siehe die Lösung zu (iii). Aus (ii) folgt, dass $(g_n)_{n\geq 2}$ gleichmässig in $[0,1]$ gegen $g$ konvergiert. Somit konvergieren die Integrale von $g_n$ gegen das Integral von $g$ (Satz 5.5.1).

**14.2. Leibniz-Reihe.** Geben Sie einen vollständigen Beweis der Gleichheit

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

(vgl. Beispiel 5.5.5 im Skript).

**Lösung:** Die Gleichheit $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ folgt aus der Definition des Arcustangens als Umkehrabbildung von $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ und

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

(vgl. Aufgabe 7.4(a) in Serie 7).

Für die Reihendarstellung von $\arctan(1)$ gehen wir analog vor wie in Beispiel 5.5.4. Für $0 \leq x < 1$ gilt aufgrund der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Durch Integration von 0 bis $x$ finden wir mit Korollar 5.5.3, dass

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},$$

also

$$\arctan(x) - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=2n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+3}}{4n+3} + \frac{x^{4n+5}}{4n+5} - + \cdots$$

für jedes $n \in \mathbb{N}^*$. Für jedes fixierte $x \in (0,1)$ ist die letzte Reihe oben rechts eine alternierende Reihe, deren Summanden im Absolutbetrag monoton fallend sind. Wir können also die Abschätzung aus dem Leibniz-Kriterium (Satz 2.7.12) anwenden, und erhalten

$$\frac{x^{4n+1}}{4n+1} - \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \leq \arctan(x) - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \leq \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

für alle $x \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}^*$. In dieser Ungleichungskette existieren alle linksseitigen Grenzwerte für $x \to 1^-$. Also können wir zum Grenzwert übergehen und erhalten

$$\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \leq \arctan(1) - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \leq \frac{1}{4n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Wenn wir nun $n$ gegen $\infty$ gehen lassen, dann konvergieren die linke und die rechte Seite oben gegen 0. Daher konvergiert mit dem Sandwichlemma auch der mittlere Term für $n \to \infty$ gegen 0, und wir schliessen

$$\arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

was zu zeigen war.

**14.3. Vergleichssatz für uneigentliche Integrale.** Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A = \inf(J)$, $B = \sup(J)$, und seien $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf jedem kompakten Teilintervall von $J$ beschränkt und integrierbar sind. Zeigen Sie:

$$0 \leq |f| \leq g \text{ und } \int_A^B g(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert } \Longrightarrow \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert}$$

(vgl. Lemma 5.8.3 im Skript).

**Lösung:** Wir bemerken zunächst, dass es gemäss der Definition von uneigentlichen Integralen in der Vorlesung drei Fälle zu unterscheiden gibt:

1. $A \in J$ und $B \notin J$,
2. $A \notin J$ und $B \in J$,
3. $A \notin J$ und $B \notin J$.

Hierbei kann Fall 3 auf die ersten beiden Fälle zurückgeführt werden, da gemäss Definition ein uneigentliches Integral von $A$ bis $B$ im Fall 3 genau dann konvergiert, wenn für ein $c \in J$ die beiden uneigentlichen Integrale von $A$ bis $c$ und von $c$ bis $B$ konvergieren. Wir beweisen die Aussage nun für den Fall 1. Der Beweis für Fall 2 verläuft analog zum Fall 1.

Wir nehmen also an, dass $A \in J$ und $B \notin J$. Dann bedeutet die Konvergenz von $\int_A^B g(x)\,\mathrm{d}x$, dass der Grenzwert

$$\lim_{b \to B^-} \int_A^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Dies bedeutet wiederum, dass für jede Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ in $J$ mit $b_n \to B$ für $n \to \infty$ die Folge

$$\left(\int_A^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geq 1} \tag{1}$$

konvergent ist (in $\mathbb{R}$) mit einem Grenzwert, der nicht von der Wahl der Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ abhängt. Insbesondere ist die Folge (1) eine Cauchy-Folge. Betrachten wir nun die entsprechenden Integrale der Funktion $f$, dann erhalten wir aus der Dreiecksungleichung für Integrale (Korollar 5.3.2) und der Annahme $|f| \leq g$, dass für $m, n \geq 1$ mit $b_m \geq b_n$:

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{b_m} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_A^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{b_n}^{b_m} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{b_n}^{b_m} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{b_n}^{b_m} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^{b_m} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_A^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Wenn $b_m \leq b_n$ ist, dann erhalten wir analog

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{b_m} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_A^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{b_m}^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{b_m}^{b_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{b_m}^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_A^{b_m} g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

In jedem Fall gilt also

$$\left|\int_A^{b_m} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_A^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_A^{b_m} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_A^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Da die Folge (1) eine Cauchy-Folge ist, folgt aus der letzten Ungleichung, dass auch

$$\left(\int_A^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geq 1} \tag{2}$$

eine Cauchy-Folge ist, also einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ besitzt, den wir mit $\alpha\Big((b_n)_{n\geq 1}\Big)$ bezeichnen.

Um zu zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{b\to B^-} \int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert, müssen wir nun noch beweisen, dass $\alpha\Big((b_n)_{n\geq 1}\Big)$ immer derselbe Wert ist, auch wenn wir unterschiedliche Folgen $(b_n)_{n\geq 1}$ verwenden. Seien dafür $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(b'_n)_{n\geq 1}$ zwei Folgen in $J$, die beide für $n \to \infty$ gegen $B$ konvergieren. Dann konvergiert die Folge (2) nach dem bisher Gezeigten gegen $\alpha\Big((b_n)_{n\geq 1}\Big)$ und die entsprechende Folge mit $b'_n$ statt $b_n$ gegen $\alpha\Big((b'_n)_{n\geq 1}\Big)$. Sei $(b''_n)_{n\geq 1}$ eine Folge, die abwechselnd Folgenglieder von $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(b'_n)_{n\geq 1}$ enthält, also

$$b''_n = \begin{cases} b_{n/2}, & \text{wenn } n \text{ gerade}, \\ b'_{(n+1)/2}, & \text{wenn } n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Dann konvergiert auch $(b''_n)_{n\geq 1}$ für $n \to \infty$ gegen $B$, und wiederum nach dem bisher Gezeigten konvergiert dann die Folge

$$\left(\int_A^{b''_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\geq 1} \tag{3}$$

gegen $\alpha\Big((b''_n)_{n\geq 1}\Big)$. Allerdings enthält (3) als Teilfolge sowohl die Folge (2) (mit den geraden Indizes) als auch die entsprechende Folge mit $b'_n$ statt $b_n$ (mit den ungeraden Indizes), und somit folgt aus der Konvergenz von (3), dass alle drei Grenzwerte übereinstimmen müssen:

$$\alpha\Big((b_n)_{n\geq 1}\Big) = \alpha\Big((b'_n)_{n\geq 1}\Big) = \alpha\Big((b''_n)_{n\geq 1}\Big).$$

Dies zeigt, dass der Grenzwert von (2) nicht von der gewählten Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ abhängt. Also ist die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{b\to B^-} \int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

in $\mathbb{R}$ und damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x$ bewiesen.

**14.4. Uneigentliche Integrale I.** Zeigen Sie, dass die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+2}\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

*Hinweis:* Für das erste Integral kann man verwenden, dass die Funktion $x^3 e^{-x/2}$ auf $[0,\infty)$ beschränkt ist.

**Lösung:** Durch dreimalige Anwendung der Regel von l'Hospital (Satz 4.2.10) sieht man, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x/2}} = 0.$$

Daher gibt es $M \geq 0$, so dass $x^3 \leq e^{x/2}$ für alle $x \geq M$. Auf dem kompakten Intervall $[0, M]$ nimmt die stetige Funktion $x \mapsto x^3 e^{-x/2}$ nach dem Min-Max-Satz (Satz 3.4.5) ihr Maximum $C$ an. Dann folgt für alle $x \geq 0$ mit der Konstanten $D = \max\{1, C\}$, dass $x^3 \leq De^{x/2}$, also

$$|x^3 e^{-x}| = x^3 e^{-x} \leq De^{-x/2}.$$

Das uneigentliche Integral von $e^{-x/2}$ über $[0, \infty)$ konvergiert, da

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-x/2} \, \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} 2(1 - e^{-b/2}) = 2.$$

Daher folgt aus dem Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3), dass auch das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

konvergiert.

Für das zweite uneigentliche Integral bemerken wir, dass für $x \geq 1$:

$$\left| \frac{x^2+1}{x^4+2} \right| = \frac{x^2+1}{x^4+2} \leq \frac{x^2+1}{x^4} \leq \frac{2}{x^2}.$$

Gemäss Beispiel 5.8.2 konvergiert das uneigentliche Integral von $2/x^2$ über $[1, \infty)$. Daher folgt aus dem Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3), dass auch das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+2} \, \mathrm{d}x$$

konvergiert.

Beim dritten uneigentlichen Integral gehört der linke Endpunkt 0 des Intervalls nicht zum Definitionsbereich des Integranden. Für alle $x \in (0, 1]$ gilt

$$\left| \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}} \right| = \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

und das uneigentliche Integral von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ über $(0, 1]$ konvergiert gemäss Beispiel 5.8.9. Wiederum folgt aus dem Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3), dass auch das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

konvergiert.

**14.5. Uneigentliche Integrale II.** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie deren Werte (falls konvergent):

**(a)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$

**(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

**(c)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$

**(d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{|x|\ln(|x|)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

**(e)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

**(f)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

**(g)** $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

**(h)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x$

**(i)** $\displaystyle\int_1^\infty \sin\!\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

**Lösung:**

**(a)** Wir verwenden die Substitution $t=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$, dann ist $x=\frac{t^2}{1-t^2}$ und $\mathrm{d}x=\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Aus der Substitutionsregel (Satz 5.4.6) erhalten wir für $b>1$:

$$\begin{aligned}
\int_1^b \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{b}{1+b}}} \frac{(1-t^2)^3}{t^6}\cdot t\cdot\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{b}{1+b}}}\frac{1-t^2}{t^4}\,\mathrm{d}t\\
&= 2\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{b}{1+b}}}\left(t^{-4}-t^{-2}\right)\mathrm{d}t = 2\left[-\frac{1}{3}t^{-3}+t^{-1}\right]\Bigg|_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{\frac{b}{1+b}}}\\
&= 2\left(-\frac{1}{3}\left(\frac{b}{1+b}\right)^{-3/2}+\sqrt{\frac{1+b}{b}}+\frac{1}{3}2^{3/2}-\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Der letzte Term konvergiert für $b \to \infty$. Also konvergiert das uneigentliche Integral über $[1, \infty)$ und hat den Wert

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}2^{3/2}-\sqrt{2}\right)\\ &= \frac{2}{3}(2-\sqrt{2}).\end{aligned}$$

**(b)** Mit der Substitution $t = -\frac{1}{x}$ erhalten wir für $0 < a < b$:

$$\int_a^b \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1/a}^{-1/b} e^t\,\mathrm{d}t = e^{-1/b} - e^{-1/a}.$$

Für $a \to 0^+$ und $b \to \infty$ konvergiert dieser Ausdruck gegen 1. Also konvergiert das uneigentliche Integral über $(0, \infty)$ und hat den Wert

$$\int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

**(c)** Mit der Substitution $t = \sqrt{x}$ erhalten wir für $0 < a < b$:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{t(1+t^2)}2t\,\mathrm{d}t = 2\Big(\arctan(\sqrt{b}) - \arctan(\sqrt{a})\Big).$$

Für $a \to 0^+$ und $b \to \infty$ konvergiert dieser Ausdruck gegen $\pi$. Also konvergiert das uneigentliche Integral über $(0, \infty)$ und hat den Wert

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

**(d)** Wir bemerken zunächst, dass der Integrand eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion darstellt, da $x \mapsto |x|\ln(|x|)$ eine stetige Fortsetzung in $x_0 = 0$ besitzt (vgl. Beispiel 4.2.12(2)). Für $x \geq e$ gilt für den Integranden die Abschätzung

$$\frac{|x|\ln(|x|)}{1+x^2} \geq \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}.$$

Da das uneigentliche Integral von $\frac{1}{2x}$ über $[e, \infty)$ divergiert (Beispiel 5.8.2), divergiert nach dem Divergenzfall im Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3) also das uneigentliche Integral

$$\int_e^\infty \frac{|x|\ln(|x|)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

und damit divergiert auch das entsprechende uneigentliche Integral über $(-\infty, \infty)$.

**(e)** Sei $0 < a < 1$. Wir verwenden partielle Integration (Satz 5.4.5) mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g'(x) = \sin(1/x)/x^2$. Dann ist $g(x) = \cos(1/x)$ und

$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{\sin(1/x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x &= \sqrt{x}\cos(1/x)\Big|_a^1 - \frac{1}{2}\int_a^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(1) - \sqrt{a}\cos(1/a) - \frac{1}{2}\int_a^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Es gilt

$$\lim_{a\to 0^+} \sqrt{a}\cos(1/a) = 0.$$

Also müssen wir die Konvergenz von

$$\int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

untersuchen. Da $|\cos(1/x)| \leq 1$ folgt die Konvergenz des letzten Integrals aber direkt aus der Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ (Beispiel 5.8.9) und dem Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3). Also konvergiert das vorliegende uneigentliche Integral.

**(f)** Die Funktion $\frac{4x^3}{x^4-1}$ ist im Punkt $x_0 = 1$ nicht definiert. Für $1 < a < 2$ gilt

$$\int_a^2 \frac{4x^3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x^4-1|\Big|_a^2 = \ln(15) - \ln(a^4-1).$$

Der letzte Term divergiert für $a \to 1^+$. Also divergiert das uneigentliche Integral von $\frac{4x^3}{x^4-1}$ über $(1, 2]$.

**(g)** Die Funktion $1/\sin(t) - 1/t$ ist im linken Endpunkt 0 des Integrationsbereichs nicht definiert. Allerdings gilt für den Grenzwert $t \to 0^+$ mit zweimaliger Anwendung der Regel von l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}\right) &= \lim_{t\to 0^+}\frac{t-\sin(t)}{t\sin(t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)+t\cos(t)} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin(t)}{2\cos(t)-t\sin(t)} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

Also besitzt der Integrand eine stetige Fortsetzung im linken Endpunkt 0, also auf das kompakte Intervall $[0, 1]$. Daher kann das uneigentliche Integral als gewöhnliches Riemann-Integral einer stetigen Funktion über $[0, 1]$ betrachtet werden und damit ist das uneigentliche Integral konvergent.

**(h)** Die Funktion $1 - x^x = 1 - e^{x\ln(x)}$ ist positiv in $(0,1)$, weil $x\ln(x) < 0$ in $(0,1)$. Da $e^t \geq 1 + t$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ (Korollar 3.6.4), erhalten wir für $x \in (0,1)$:

$$x^x = e^{x\ln x} \geq 1 + x\ln(x) \implies \frac{1}{1-x^x} \geq \frac{1}{1-(1+x\ln(x))} = -\frac{1}{x\ln(x)}.$$

Für $0 < a < b < 1$ gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(-\ln(x))\Big|_a^b = \ln(-\ln(b)) - \ln(-\ln(a)).$$

Hier liegt Divergenz vor, wenn $a \to 0^+$ (und auch wenn $b \to 1^-$). Also divergiert das uneigentliche Integral von $-\frac{1}{x\ln(x)}$ über $(0,1)$. Gemäss obiger Abschätzung folgt mit dem Divergenzfall im Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3) also auch die Divergenz des uneigentlichen Integrals von $\frac{1}{1-x^x}$ über $(0,1)$.

**(i)** Wir verwenden die Substitution $u = \frac{1}{t}$. Dann gilt für $b > 1$:

$$\int_1^b \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_{1/b}^1 \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Wenn wir $\sin(u)$ mit Korollar 3.9.2 nach unten abschätzen, dann erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{\sin(u)}{u^2} \geq \frac{1}{u} - \frac{u}{6}$$

für alle $u \in (0,1]$, und das uneigentliche Integral dieses letzteren Terms divergiert über $(0,1]$ (Beispiel 5.8.9). Also folgt mit dem Divergenzfall im Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3) auch die Divergenz des vorliegenden uneigentlichen Integrals.

### 14.6. Uneigentliche Integrale III.

**(a)** Zeigen Sie, dass

$$\int_1^x \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} + \frac{1}{4\pi}\int_1^{x^2} \frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y$$

für alle $x \geq 1$.

*Hinweis:* Verwenden Sie eine Substitution und integrieren Sie danach partiell.

**Lösung:** Mit $t^2 = y$ ($t = \sqrt{y}$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$), ergibt die Substitutionsregel (Satz 5.4.6), dass

$$\int_1^x \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t = \int_1^{x^2} \frac{\cos(\pi y)}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.$$

Nun verwenden wir partielle Integration (Satz 5.4.5) mit $f(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ und $g'(y) = \cos(\pi y)$ und erhalten, dass

$$\begin{aligned}\int_1^{x^2} \frac{\cos(\pi y)}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y &= \frac{\sin(\pi y)}{2\pi\sqrt{y}}\bigg|_1^{x^2} + \frac{1}{4\pi}\int_1^{x^2} \frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} + \frac{1}{4\pi}\int_1^{x^2} \frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich die Formel in der Aufgabe.

**(b)** Folgern Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$$

konvergiert, obwohl $\cos(\pi t^2)$ für $t \to \infty$ *nicht* gegen Null konvergiert.

**Lösung:** Dass $\cos(\pi t^2)$ für $t \to \infty$ nicht gegen 0 konvergiert, folgt zum Beispiel daraus, dass $|\cos(\pi t_n^2)| = 1$ für $t_n = \sqrt{n}$. Aus Teil (a) erhalten wir Folgendes:

$$\int_1^{\infty} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} + \frac{1}{4\pi}\int_1^{x^2} \frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y\right). \tag{4}$$

Da $\left|\sin(\pi x^2)/(2\pi x)\right| \leq 1/(2\pi x)$ für alle $x \geq 1$, folgt, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} = 0.$$

Der zweite Term im Limes auf der rechten Seite in (4) konvergiert aufgrund des Vergleichssatzes für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3): Es gilt

$$\left|\sin(\pi y)/(y^{3/2})\right| \leq y^{-3/2}$$

für alle $y \geq 1$, und das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} y^{-3/2}\,\mathrm{d}y$ konvergiert (Beispiel 5.8.2). Somit existiert der Grenzwert auf der rechten Seite in (4) (in $\mathbb{R}$), und dies bedeutet, dass das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$ konvergiert.

**14.7. Asymptotische Äquivalenz.** Seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ Folgen positiver reeller Zahlen, so dass $a_n \sim b_n$ für $n \to \infty$ und $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \alpha$ für eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \alpha$ gilt.

**Lösung:** Die asymptotische Äquivalenz von $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ bedeutet, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Da

$$b_n c_n = \frac{a_n c_n}{\frac{a_n}{b_n}}$$

für alle $n \geq 1$, und $a_n c_n$ für $n \to \infty$ gegen $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert (gemäss Annahme) und $\frac{a_n}{b_n}$ gegen 1 konvergiert (wegen der asymptotischen Äquivalenz), folgt aus Satz 2.1.8(3), dass

$$\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n c_n}{\frac{a_n}{b_n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n c_n}{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}} = \frac{\alpha}{1} = \alpha.$$

**14.8. Konvexe Funktionen und Tangenten.** Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion und $g$ die Tangente an $f$ in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass die Tangente $g$ unter der Funktion $f$ liegt, also dass $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

**Lösung:** Wir betrachten die Funktion $h := f - g$, welche auf $(a,b)$ definiert und differenzierbar ist. Da $g$ die Tangente an $f$ im Punkt $x_0$ ist, gilt

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \tag{5}$$

für $x \in (a,b)$. Da $f$ konvex ist, folgt aus Satz 4.2.16, dass $f'$ in $(a,b)$ monoton wachsend ist. Aus (5) folgt dann, dass auch $h'$ in $(a,b)$ monoton wachsend ist. Zusätzlich wissen wir, dass $h'(x_0) = 0$. Wir erhalten also:

$$h'(x) \begin{cases} \leq 0, & x \leq x_0, \\ \geq 0, & x \geq x_0. \end{cases}$$

Aus Korollar 4.2.5 folgt damit, dass $h$ in $(a, x_0]$ monoton fallend und in $[x_0, b)$ monoton wachsend ist. Dies zeigt, dass $h$ in $x_0$ ein globales Minimum annimmt, d.h.

$$f(x) - g(x) = h(x) \geq h(x_0) = 0$$

für alle $x \in (a,b)$, was zu zeigen war.

**14.9. Wallissches Produkt.** In dieser Aufgabe wollen wir die folgende, als *Wallis-Produkt* bekannte Gleichheit beweisen:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdot \dots .\end{aligned}$$

Führen Sie dazu die folgenden Schritte durch:

**(a)** Betrachten Sie das Integral $A_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \, \mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$A_0 = \frac{\pi}{2},\ A_1 = 1,\ A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

**Lösung:** Es ist klar, dass

$$A_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad A_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Wenn $n \geq 2$, dann erhalten wir durch partielle Integration (Satz 5.4.5)

$$\begin{aligned}
A_n &= \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \sin(x)^{n-1} \, \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{-\cos(x)\sin(x)^{n-1}\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(x)^2}_{=1-\sin(x)^2} \sin(x)^{n-2} \, \mathrm{d}x \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{n-2} \, \mathrm{d}x - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n \, \mathrm{d}x \\
&= (n-1) A_{n-2} - (n-1) A_n,
\end{aligned}$$

also

$$A_n = \frac{n-1}{n} A_{n-2}.$$

**(b)** Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = 1.$$

**Lösung:** Aufgrund von (a) gilt

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \longrightarrow 1$$

für $n \to \infty$.

**(c)** Zeigen Sie, dass $A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}$ und folgern Sie damit aus (b), dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1.$$

**Lösung:** Da $0 \leq \sin(x) \leq 1$ für alle $x \in [0, \pi/2]$, gilt $\sin(x)^{2n+2} \leq \sin(x)^{2n+1} \leq \sin(x)^{2n}$ für alle $x \in [0, \pi/2]$. Aus der Monotonie des Integrals (Satz 5.3.1) folgt also

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)^{2n+2} \, \mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{2n+1} \, \mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/2} \sin(x)^{2n} \, \mathrm{d}x,$$

d.h. $A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}$. Teilen wir durch $A_{2n}$, so ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \leq \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die linke Seite für $n \to \infty$ gemäss (b) gegen 1 konvergiert, folgt aus dem Sandwichlemma, dass auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1.$$

**(d)** Verwenden Sie die Rekursionsformel für $A_n$ um zu zeigen, dass

$$\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Lösung:** Aus den Formeln in (a) folgen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
A_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}A_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}A_{2n-3} = \cdots \\
&= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\dots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}A_1 \\
&= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\dots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_{2n}} &= \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{A_{2n-2}} = \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{1}{A_{2n-4}} = \cdots \\
&= \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\dots\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{A_0} \\
&= \frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\dots\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Wir bilden nun das Produkt dieser beiden Darstellungen von $A_{2n+1}$ und $1/A_{2n}$ indem wir zuerst den Faktor $2/\pi$ nehmen und dann abwechselnd jeweils einen der Brüche in der Darstellung von $1/A_{2n}$ und von $A_{2n+1}$ nehmen, von rechts nach links. Dies ergibt die gewünschte Formel

$$\begin{aligned}
\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\dots\cdot\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\dots\cdot\frac{(2n-2)^2}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.
\end{aligned}$$

**(e)** Folgern Sie aus (c) und (d) die Wallissche Produktdarstellung von $\frac{\pi}{2}$.

**Lösung:** Aus (c) und (d) zusammen folgt

$$\frac{2}{\pi}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} \longrightarrow 1$$

für $n \to \infty$. Multiplizieren wir diese Konvergenz mit $\frac{\pi}{2}$ so erhalten wir

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{\pi}{2},$$

was zu zeigen war.

**14.10. Gammafunktion.** Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

**(a)** Zeigen Sie, dass $\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ genau dann konvergiert, wenn $s > 0$.

**Lösung:** Wenn $s \geq 1$, dann ist der Integrand $x \mapsto e^{-x}x^{s-1}$ auf dem gesamten Intervall $[0,1]$ stetig, und daher beschränkt und integrierbar (Satz 5.2.7). In diesem Fall kann das vorliegende Integral also als gewöhnliches bestimmtes Integral betrachtet werden.

Wenn $s < 1$ ist, dann ist $x \mapsto e^{-x}x^{s-1}$ unbeschränkt wenn $x \to 0^+$, und somit liegt ein "echtes" uneigentliches Integral vor. In diesem Fall vergleichen wir das vorliegende Integral mit dem uneigentlichen Integral

$$\int_0^1 x^{s-1}\,\mathrm{d}x,$$

welches gemäss Beispiel 5.8.9 genau dann konvergiert, wenn $s > 0$. Aus $e^{-1}x^{s-1} \leq e^{-x}x^{s-1} \leq x^{s-1}$ für $x \in (0,1]$ folgt nun aus dem Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3), dass

$$\int_0^1 e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$$

auch genau dann konvergiert, wenn $s > 0$.

**(b)** Zeigen Sie, dass $\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.

**Lösung:** Sei $s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{s-1}}{e^{x/2}} = 0.$$

(Dies folgt z.B. indem man l'Hospital so oft anwendet, bis im Zähler der Exponent von $x$ kleiner oder gleich 0 ist.) Daher gibt es $M \geq 0$, so dass $x^{s-1} \leq e^{x/2}$ für alle $x \geq M$. Auf dem kompakten Intervall $[1, M]$ nimmt die stetige Funktion $x \mapsto x^{s-1}/e^{x/2}$ nach dem Min-Max-Satz (Satz 3.4.5) ihr Maximum $C$ an. Dann folgt für alle $x \geq 1$ mit der Konstanten $D = \max\{1, C\}$, dass $x^{s-1} \leq De^{x/2}$, also

$$e^{-x}x^{s-1} \leq De^{-x/2}.$$

Da $\int_1^\infty e^{-x/2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert, folgt somit aus dem Vergleichssatz für uneigentliche Integrale (Lemma 5.8.3), dass

$$\int_1^\infty e^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.

**(c)** Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Gamma(1/2)$ gilt.

*Hinweis:* Schreiben Sie $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ und verwenden Sie dann eine Substitution.

**Lösung:** Für $0 < a < b$ gilt mit der Substitution $x = t^2$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$:

$$\int_a^b e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} e^{-x}x^{-1/2}\,\mathrm{d}x.$$

(Beachten Sie, dass die Funktion $t \mapsto e^{-t^2}$ auch in $t_0 = 0$ definiert und stetig ist, dass die Anwendung der Substitutionsregel in der Form von Satz 5.4.6 mit $x = t^2$ auf einem Intervall der Form $[0, b]$ hier allerdings nicht funktioniert, da die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.)

Für $a \to 0^+$ und $b \to \infty$ konvergiert das Integral auf der rechten Seite oben nach Definition genau gegen $\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$. Dies zeigt, dass

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(1/2).$$

Da $t \mapsto e^{-t^2}$ eine gerade Funktion ist, gilt für alle $0 < a < b$

$$\int_a^b e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-b}^{-a} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Daher erhalten wir mit dem obigen Argument auch, dass

$$\int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(1/2).$$

Insgesamt gilt also

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Gamma(1/2),$$

was zu zeigen war.