Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

1.1. MC Fragen: Supremum und Infimum in $\mathbb{R}$. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Wenn $A \subset \mathbb{R}$ ein Maximum besitzt, dann besitzt $A \setminus \mathbb{Q}$ auch ein Maximum.

- ◯ Richtig
- ◯ Falsch

(b) Sei $A = \left\{ \frac{1}{1+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Dann gilt

- ◯ $\max(A) = 1$, $\min(A) = 0$.
- ◯ $\max(A) = 1$, $\inf(A) = 0$.
- ◯ A hat kein Maximum, $\inf(A) = 0$.
- ◯ $\sup(A) = 1$, $\min(A) = 0$.

(c) Sei S eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $a \in \mathbb{R}$ ihr Supremum. Dann gilt:

- ◯ für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine obere Schranke b von S, so dass $a - \varepsilon < b < a$;
- ◯ $S \setminus \{a\}$ besitzt ein Maximum;
- ◯ $S \cup \{a\}$ besitzt ein Maximum;

1.2. $\star$ Ordnung der reellen Zahlen. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen über die Ordnung der reellen Zahlen. Geben Sie jede Verwendung der Axiome O1–O4 und K1, K2 explizit an.

(i) Für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ und $0 < u < v$ gilt $x \cdot u < y \cdot v$.

(ii) Für alle $s, t, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ und $\alpha < 0$ gilt $\alpha \cdot s > \alpha \cdot t$.

1.3. Monotonie und Eindeutigkeit von Wurzeln. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl.

(i) Zeigen Sie, dass

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

(ii) Folgern Sie, dass aus $0 \leq a < b$ folgt, dass $0 \leq a^n < b^n$.

(iii) Folgern Sie, dass jede reelle Zahl t höchstens eine nichtnegative n-te Wurzel hat, also dass es höchstens eine reelle Zahl $a \geq 0$ gibt mit $a^n = t$.

1.4. Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Lesen Sie über die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ im Buch von Königsberger: Satz 4 und Satz 5 in Kapitel 2.3. (LINK)

1.5. Supremum und Infimum I. Seien A, B zwei nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$.

(i) Bestimmen Sie das Supremum von $s \cdot A := \{s \cdot a \mid a \in A\}$.
Hinweis: Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von s.

(ii) Zeigen Sie, dass für die Menge $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ gilt:

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

1.6. ⋆ Supremum und Infimum II. Bestimmen Sie das Infimum und Supremum und, falls vorhanden, das Minimum und Maximum der folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A_1 = \left\{ t + \frac{1}{t} \,\middle|\, t \in (0, \infty) \right\},$$
$$A_2 = \left\{ \frac{1}{2+k} + \frac{1}{3+m} \,\middle|\, k, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1.7. MC Fragen: Intervalle und komplexe Zahlen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Wenn A und B zwei Intervalle in $\mathbb{R}$ sind, dann ist $A \cup B$ auch ein Intervall.

○ Richtig ○ Falsch

(b) Seien $a_0, \ldots, a_4$ reelle Zahlen. Falls $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_4 z^4 + z^5 = 0$$

ist, dann ist $\bar{z}$ auch eine Lösung.

○ Richtig ○ Falsch

(c) Seien z_1 und z_2 zwei komplexe Zahlen, so dass $|z_1| = |z_2|$. Dann gilt $z_1 = z_2$ oder $z_1 = -z_2$.

○ Richtig ○ Falsch

(d) Sei z eine komplexe Zahl. Dann existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $z = ib$ genau dann, wenn $\bar{z} = -z$.

○ Richtig ○ Falsch

1.8. Komplexe Zahlen - Wiederholung. Finden Sie für jede der folgenden komplexen Zahlen z

- ihre kartesische Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$,
- ihren Betrag $|z|$,
- ihre Konjugierte $\bar{z}$,
- ihr Reziprokes $1/z$ (in kartesischer Form):

$$z_1 = -42, \qquad z_2 = -\frac{1}{i}, \qquad z_3 = \frac{1-i}{1+i},$$

$$z_4 = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad z_5 = \sin\alpha + i\cos\alpha,$$

$$z_6 = 2022 + i^{2021}, \qquad z_7 = (1+i)^6,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Vielleicht möchten Sie z_7 zuerst in Polarform schreiben.

Bemerkung: Die kartesische Form darf nicht i im Nenner erhalten! Z.B. ist $1 + i$ OK, aber $1/(1 + i)$ nicht.