Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

2.1. MC Fragen: Folgenkonvergenz. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben.
- ◯ Jede monotone und nach oben beschränkte Folge ist konvergent.
- ◯ Es gibt konvergente Folgen, die nicht beschränkt sind.
- ◯ Eine divergente Folge ist nicht beschränkt.

(b) Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ und $(c_n)_{n\geq 1}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $c_n = a_n + b_n$.

- ◯ Falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ existiert, dann existieren $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

- ◯ Falls $\lim_{n\to\infty} c_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren, dann existiert $\lim_{n\to\infty} a_n$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

- ◯ Falls $(c_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist, dann muss mindestens eine der Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkt sein.
- ◯ Falls $(c_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, dann konvergiert mindestens eine der Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$.

(c) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen impliziert, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

- ◯ Es gibt $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq 12n$ für alle $n \geq N$.
- ◯ $a_n = 1/b_n$ für eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n \to 0$ für $n \to \infty$.
- ◯ Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert $n \geq N$, so dass $a_n > 2^n$.
- ◯ $\{a_{n+1} - a_n \mid n \geq 1\}$ ist unbeschränkt.

(d) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

- ◯ Falls $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$$

gilt, dann konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$.

- ◯ Falls $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert, dann ist die Folge $b_n = a_{n+1} + a_n$ konvergent.
- ◯ Falls die Folge $b_n = a_{n+1} - a_n$ gegen 0 konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent.
- ◯ Falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \geq 1$, dann ist $(a_n)_{n\geq 1}$ unbeschränkt.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$?

- ◯ $\forall N \geq 1\, \exists n \geq N\colon |a_n - 2| < \frac{1}{N}$.
- ◯ $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \geq 1\colon a_n \leq 2 + \varepsilon$.
- ◯ $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \geq 1\, \forall n \geq N\colon |a_n - 2| < \varepsilon$.
- ◯ $\exists \varepsilon > 0\, \exists N \geq 1\, \forall n \geq N\colon |a_n - 2| \leq \varepsilon$.

2.2. Grenzwert I. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Beweisen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2.3. Grenzwert II. Man untersuche die untenstehenden Zahlenfolgen. Sind sie beschränkt? Konvergieren sie? Wenn ja: Was ist ihr Grenzwert?

$\star$**(a)** $a_n = \dfrac{3n^5 + 2n^3 + 5n}{10 + 2n^5}$;

$\star$**(b)** $b_n = \sqrt{n^2 + 3n} - n$;

(c) $c_n = \dfrac{3^n + (-2)^n}{3^n - 2^n}$;

(d) $d_n = \left(\dfrac{n}{n^2} + \dfrac{n+1}{n^2} + \cdots + \dfrac{3n}{n^2}\right)$;

$\star$**(e)** $e_n = \sqrt[n]{5^n + 11^n + 17^n}$.

2.4. $\star$ Rekursive Folge. Es sei $(x_n)_{n\geq 1}$ rekursiv gegeben durch $x_1 := 1$ und

$$x_{n+1} := 1 + \frac{1}{x_n}, \qquad n \geq 1.$$

(i) Nehmen Sie an, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ gegen $g \in \mathbb{R}$ konvergiert. Bestimmen Sie den einzigen möglichen Wert von g, indem Sie auf beiden Seiten der Rekursionsgleichung den Grenzwert nehmen und dann nach g auflösen.

(ii) Zeigen Sie, dass $|x_{n+1} - g| \leq g^{-1}|x_n - g|$ für alle $n \geq 1$. Folgern Sie, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ gegen g konvergiert.

2.5. Eulersche Zahl. Wir definieren die Folgen $(e_n)_{n\geq 1}$ und $(x_n)_{n\geq 1}$ durch

$$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad x_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

für $n \geq 1$. In der Vorlesung wurde bewiesen, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} e_n = e.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Folge $(e_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend ist. Folgern Sie, dass $e_n \leq e \leq x_n$ für alle $n \geq 1$.

(ii) Sei $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie ein $n \geq 1$, so dass $|e - e_n| < 10^{-k}$.

2.6. Divergente Folgen. Finden Sie Beispiele für reelle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$, so dass $x_n \to \infty$ und $y_n \to -\infty$ für $n \to \infty$ und…

(a) $x_n + y_n \to \infty$ für $n \to \infty$;

(b) $x_n + y_n \to -\infty$ für $n \to \infty$;

(c) $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ konvergiert;

(d) $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und divergiert.