Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

3.1. MC Fragen: Folgen und Reihen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch

$$a_n = \begin{cases} 1+\sqrt{\frac{k}{12k+1}}, & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{5k^3+k}{k^3+1}, & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{(-1)^k}{k}, & \text{falls } n = 3k+3 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert in $\mathbb{R}$;
- ◯ $\liminf_{n\to\infty} a_n$ existiert in $\mathbb{R}$;
- ◯ $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1+\sqrt{1/12}$.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Sei $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen, so dass

  $$|q_n - q_{n+1}| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

  Dann ist $(q_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge.
- ◯ Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, und σ eine Permutation von $\mathbb{N}^*$ (d.h. eine Bijektion der Menge $\mathbb{N}^*$ auf sich selbst). Dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $b_n = a_{\sigma(n)}$ für $n \geq 1$.

(c) Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann:

- ◯ konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 1} \sqrt{x_k}$;
- ◯ kann $(x_n)_{n\geq 1}$ unbeschränkt sein;
- ◯ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$

  $$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

(d) Seien $X_n = [\frac{n-1}{2n}, \frac{n+1}{2n})$ und $Y_n = [n^2 - n, \infty)$ für $n \geq 1$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ $X_n \subset X_{n+1}$ für jedes $n \geq 1$;
- ◯ es existiert $n \geq 1$, so dass $Y_n \subset Y_{n+1}$;
- ◯ $\bigcap_{n\geq 1} X_n \neq \emptyset$;
- ◯ $\bigcap_{n\geq 1} Y_n \neq \emptyset$.

(e) Sei $\sum_{k\geq 1} a_k$ eine reelle oder komplexe Reihe. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$.
- ◯ Wenn die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- ◯ Wenn die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen beschränkt ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$.
- ◯ Wenn die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$.

(f) Was ist der Wert der Reihe $\sum_{k\geq 1} 1/(4k^2-1)$?

◯ 1 ◯ $\frac{1}{2}$ ◯ $\frac{1}{3}$ ◯ $\frac{1}{4}$

3.2. Komplexe Folgen. Entscheiden Sie in den folgenden Fällen, ob die komplexe Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ konvergiert oder nicht. Im Falle der Konvergenz, bestimmen Sie den Grenzwert.

$\star$**(a)** $z_n = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$

$\star$**(b)** $z_n = \frac{n^2+2-n\cdot i}{n-n^2\cdot i}$

(c) $z_n = a^n$ für ein $a \in \mathbb{C}$ mit $|a| = 1$

3.3. Folge mit summierbaren Abständen. Sei $(z_n)_{n\geq 1}$ eine komplexe Folge mit der Eigenschaft, dass

$$|z_{n+1} - z_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass $(z_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist.

3.4. Limes superior und Limes inferior I. Sei $x_n = 2^n(1 + (-1)^n) + 1$ für $n \geq 1$. Bestimmen Sie (mit Beweis):

(a) $\liminf_{n\to\infty} x_n$

(b) $\limsup_{n\to\infty} x_n$

$\star$**(c)** $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

(d) $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$

3.5. Limes superior und Limes inferior II. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass $\liminf_{n\to\infty} x_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(x_n)_{n\geq 1}$ und $\limsup_{n\to\infty} x_n$ der grösste Häufungspunkt von $(x_n)_{n\geq 1}$ ist.

3.6. $\star$ Konvergenz und Häufungspunkte. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und $c \in \mathbb{R}$. Verwenden Sie den Satz von Bolzano–Weierstrass um zu zeigen:

$(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen c $\iff$ jede konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\geq 1}$ hat c als Grenzwert