Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

4.1. MC Fragen: Reihen und Potenzreihen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty)$. Sei ausserdem ρ' der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n\geq 1} n c_n z^{n-1}$. Welche Aussage trifft zu?

- ◯ $\rho > \rho'$
- ◯ $\rho < \rho'$
- ◯ $\rho = \rho'$
- ◯ Es liegen nicht genügend Informationen vor, um dies zu entscheiden.

(b) Wir nehmen an, dass $\sum_{k\geq 1} a_k$ absolut konvergiert und dass $\sum_{k\geq 1} b_k$ konvergiert. Geben Sie die korrekte Antwort auf folgende zwei Fragen an.

(A) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k^2$

- ◯ konvergiert nicht notwendigerweise.
- ◯ konvergiert immer, aber konvergiert nicht notwendigerweise absolut.
- ◯ konvergiert immer absolut.
- ◯ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(B) Die Reihe $\sum_{k\geq 1} a_k b_k$

- ◯ konvergiert nicht notwendigerweise.
- ◯ konvergiert immer, aber konvergiert nicht notwendigerweise absolut.
- ◯ konvergiert immer absolut.
- ◯ keine der obigen Aussagen trifft zu.

(c) Sei $\phi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung, $\sum_{n\geq 1} a_n$ eine Reihe und $b_n = a_{\phi(n)}$ für $n \geq 1$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ◯ $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ ist konvergent.
- ◯ $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ ist konvergent.
- ◯ $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ surjektiv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ ist konvergent.
- ◯ $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist absolut konvergent und ϕ injektiv $\Longrightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ ist konvergent.

4.2. Konvergenz von Reihen. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen (d.h. entscheiden Sie in jedem Fall ob die Reihe absolut konvergent, bedingt konvergent, oder divergent ist).

(a) $\sum_{k\geq 1} \frac{3}{2k+2}$

$\star$**(b)** $\sum_{k\geq 1} \frac{k^2+k+1}{k^5+k^3+1}$

$\star$**(c)** $\sum_{k\geq 1} \frac{5k+2^k}{3^k}$

(d) $\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

(e) $\sum_{k\geq 1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} \frac{1}{2^k}$

4.3. Konvergenzradius. Bestimmen Sie in den folgenden Teilaufgaben (a)–(d) den jeweiligen Konvergenzradius $\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d$ der gegebenen Potenzreihe und beantworten Sie jeweils die zusätzlichen Fragen rechts.

(a) $\sum_{k\geq 0} z^k$ — Zeigen Sie, dass die Potenzreihe in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho_a$ divergiert.

(b) $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} z^k$ — Finden Sie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| = |z_2| = \rho_b$, so dass die Potenzreihe in z_1 konvergiert und in z_2 divergiert.

(c) $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} z^k$ — Zeigen Sie, dass die Potenzreihe in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \rho_c$ absolut konvergiert.

$\star$**(d)** $\sum_{k\geq 1} \frac{(k!)^2}{(2k)!} z^k$ — *Hinweis:* Verwenden Sie nicht die Definition des Konvergenzradius, sondern wenden Sie direkt das Quotientenkriterium an.

4.4. Wurzelkriterium vs. Quotientenkriterium. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Folgern Sie, dass falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existiert, folgende Gleichheit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wie interpretieren Sie die Aussagen in dieser Aufgabe im Zusammenhang mit dem Quotienten- und Wurzelkriterium?

Hinweis: Um eine der Ungleichungen zu beweisen, können Sie mit einer reellen Zahl $q > \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ beginnen, und dann ähnlich wie im Beweis des Quotientenkriteriums zeigen, dass $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$.

4.5. $\star$ **b-adische Brüche.** Lesen Sie über *b-adische Brüche* im Buch von Königsberger (im Abschnitt 6.2.I, LINK). Stellen Sie die folgenden Zahlen als Dualbruch und als Dezimalbruch dar:

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}.$$

Welche der Entwicklungen sind endlich?

4.6. Vertauschen von Limes und unendlicher Summation. Lesen Sie die Aussage von Satz 2.7.28 im Skript.

(a) Definiere für $j, n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(j) := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = n, \\ 0, & \text{falls } j \neq n. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ existiert, dass aber

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(j) \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$$

gilt. Wieso ist Satz 2.7.28 hier nicht anwendbar?

(b) Beweisen Sie Satz 2.7.28.

Hinweis: Wählen Sie für $\varepsilon > 0$ zuerst $J \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{j=J}^{\infty} g(j) < \frac{\varepsilon}{4}$. Für hinreichend grosse n sind die Abstände zwischen $f_n(j)$ und $f(j)$ für alle $0 \leq j < J$ klein.