Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

5.1. MC Fragen: Doppelte Summation, monotone Funktionen, Stetigkeit. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ eine reelle Doppelfolge. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\right)?$$

- ◯ Keine Bedingung ist erforderlich. Diese Gleichung ist immer wahr.
- ◯ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $|a_{m,n}| \leq C$ für alle $m, n \geq 0$.
- ◯ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n} \leq C$ für alle $M, N \geq 0$.
- ◯ Es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}|a_{m,n}| \leq C$ für alle $M, N \geq 0$.

(b) Welche der folgenden Implikationen ist immer wahr?

- ◯ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt $\implies$ f monoton.
- ◯ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend $\implies$ f stetig.
- ◯ $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.
- ◯ $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ monoton $\implies$ f beschränkt.

(c) Welche der folgenden Bedingungen impliziert *nicht*, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist?

- ◯ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- ◯ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \geq 1$.
- ◯ Es gibt $C \geq 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq 1$.

(d) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Es gibt $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $f(x_0) = 0$.
- ◯ Wenn $(x_n)_{n\geq 0}$ eine reelle Folge ist, die $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = 2$ erfüllt, dann gilt die Gleichung

$$f(2) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x_n).$$

- ◯ Es gilt $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ Jede bijektive Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ ist monoton.
- ◯ Es gibt eine injektive stetige Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$, die nicht monoton ist.
- ◯ Jede stetige Funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ ist surjektiv.

5.2. Cauchy Produkt. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

5.3. $\star$ **Stetigkeit I.** Finden Sie Werte $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b, & \text{wenn } x \leq -1, \\ (a+b)x, & \text{wenn } -1 < x < 1, \\ x^2 + ax - b, & \text{wenn } x \geq 1, \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

5.4. $\star$ **Stetigkeit II.** Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \geq 0$.

5.5. Stetigkeit III. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nur in $x_0 = \frac{1}{2}$ stetig ist und in allen anderen Punkten von $\mathbb{R}$ unstetig ist.

5.6. Stetigkeit IV. Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $x_0 \in D$ ein Punkt mit $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\inf\Big\{ f(x) \mid x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Big\} > 0.$$

5.7. Gegenbeispiele zum Zwischenwertsatz.

(a) Sei $D = [0,1] \cup [2,3]$. Finden Sie eine stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $a, b \in D$ und $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$, so dass *kein* $z \in D$ existiert mit $f(z) = c$.

(b) Finden Sie eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ und $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$, so dass *kein* $z \in \mathbb{Q}$ existiert mit $f(z) = c$.

5.8. $\star$ **Existenz eines Fixpunkts.** Sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass es ein $x_0 \in [0,1]$ gibt, so dass $f(x_0) = x_0$.