Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

6.1. MC Fragen: Stetige Funktionen, Konvergenz von Funktionenfolgen.
Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- ◯ Wenn $f(x) \neq 0$ für alle $x \in [0,1]$, dann gibt es $N \geq 1$, so dass $f(x) \geq 1/N$ für alle $x \in [0,1]$.
- ◯ Wenn $f(0) = 1/2$ und $f(1) = 1/4$, dann gibt es $x \in (0,1)$, so dass $f(x) < 1/4$.
- ◯ Wenn $f(0) < 1$ und $f(1) > e$, dann gibt es $x \in [0,1]$, so dass $f(x) = e^x$.

(b) Sei $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ eine beliebige Funktion.

- ◯ Wenn f bijektiv ist, dann ist f monoton.
- ◯ Wenn f stetig ist, dann ist f nicht bijektiv.
- ◯ Wenn f monoton ist, dann ist f stetig.

(c) Seien $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $(f_n)_{n\geq 1}$ gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

- ◯ Wenn f_n stetig ist für alle geraden $n \geq 2$, dann ist f stetig.
- ◯ Die Funktionfolge $(f_n^2)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig.
- ◯ Wenn f_n streng monoton wachsend ist für alle n, dann ist f streng monoton wachsend.
- ◯ Wenn f stetig ist, dann ist mindestens eine der Funktionen f_n stetig.

(d) Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ gegeben durch

$$f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\sqrt{x} + n^{-1})^2.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x + 2\sqrt{x}$ für alle $x \in [0,\infty)$
- ◯ Es gibt $M > 0$, so dass die Folge der Funktionen $f_n|_{[M,\infty)}\colon [M,\infty) \to \mathbb{R}$ gleichmässig in $[M,\infty)$ konvergiert.
- ◯ Für alle $M > 0$ konvergiert die Folge der Funktionen $f_n|_{[0,M]}\colon [0,M] \to \mathbb{R}$ gleichmässig in $[0,M]$.

6.2. Stetigkeit. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig sind.

(a) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \exp(\exp(x^3 - 2))$

(b) $D = (0, \infty)$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\exp(x^2) + 1}$

6.3. Grenzwerte. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)} + 3}$

⋆**(c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(n^{\frac{1}{\ln(n)}} + \dfrac{1}{n}\right)$

6.4. Existenz von Lösungen. Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichungen je mindestens eine reelle Lösung im angegebenen Bereich D haben. Finden Sie für jede Gleichung ein beschränktes Intervall $I \subset D$, in dem die Lösung liegt.

(a) $x^4 - x - 12 = 0$, $\quad D = (-\infty, 0)$

(b) $x^x - 2x = 0$, $\quad D = (1, \infty)$

(c) $xe^x = 1$, $\quad D = (0, 1)$

⋆**(d)** $e^x = \sqrt{x} + 2$, $\quad D = (0, \infty)$

6.5. Umkehrfunktionen. Analysieren Sie die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf strikte Monotonie, und falls möglich, bestimmen Sie die inverse Funktion.

(a) $D = (-7, \infty)$, $\quad f(x) = 4 \cdot \ln(x + 7) + 3$

⋆**(b)** $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(c) $D = \mathbb{R}$, $\quad f(x) = e^{-x^2}$

6.6. Gleichmässige Konvergenz. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionenfolgen in $D = [0, 1]$ gleichmässig konvergent sind. Bestimmen Sie jeweils die Grenzfunktion.

(a) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2} + x + 1$

(b) $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{kx}}{k!}$

6.7. $\star$ **Punktweise vs. gleichmässige Konvergenz.** Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ sei gegeben durch

$$f_n \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1+n^2x^2}{(1+nx)^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktionenfolge in $[0,\infty)$ punktweise gegen die konstante Funktion $f(x) = 1$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Konvergenz *nicht* gleichmässig in $[0,\infty)$ ist.