Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

7.1. MC Fragen: Häufungspunkte, Grenzwerte von Funktionen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Welche der folgenden Bedingungen besagt, dass $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D ist?

- ◯ $x_0 \in D$
- ◯ für jedes $\delta > 0$ gilt $\big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}\big) \cap D \neq \emptyset$
- ◯ für jedes $\delta > 0$ gilt $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \neq \emptyset$
- ◯ es gibt eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Welche der folgenden Bedingungen besagt *nicht*, dass ∞ ein Häufungspunkt von D ist?

- ◯ für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in D$ mit $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$
- ◯ für jedes $M \in \mathbb{N}$ gilt $(M, \infty) \cap D \neq \emptyset$
- ◯ $\sup(D) = \infty$
- ◯ es gibt eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

(c) Sei $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$. Wählen Sie die richtige Antwort.

- ◯ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
- ◯ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$
- ◯ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
- ◯ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existiert nicht

(d) Sei $g(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$ für $x \neq 0$. Wählen Sie die richtige Antwort.

- ◯ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$
- ◯ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$
- ◯ $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty$
- ◯ $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existiert nicht

7.2. $\star$ **Gleichmässige Konvergenz von Potenzreihen I.** Sei $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ eine Potenzreihe, die gleichmässig in $\mathbb{R}$ konvergiert. Beweisen Sie, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $c_n = 0$ für alle $n \geq N$ ist.

7.3. Gleichmässige Konvergenz von Potenzreihen II. Geben Sie je ein Beispiel für eine Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ mit Konvergenzradius 1 an (mit Beweis), so dass

$\star$**(a)** die Potenzreihe nicht gleichmässig in $(-1, 1)$ konvergiert

(b) die Potenzreihe gleichmässig in $(-1, 1)$ konvergiert

Hinweis: Betrachten Sie für (a) eine Potenzreihe, die eine unbeschränkte Funktion darstellt.

7.4. Spezielle Werte von Cosinus und Sinus. Berechnen Sie $\cos(x)$ und $\sin(x)$ für:

(a) $x = \dfrac{\pi}{4}$

$\star$**(b)** $x = \dfrac{\pi}{3}$

(c) $x = \dfrac{\pi}{6}$

Hinweis: Finden Sie für (b) ein Polynom, das e^{ix} als Nullstelle hat, und bestimmen Sie alle (komplexen) Nullstellen dieses Polynoms.

7.5. Trigonometrische Funktionen I.

$\star$**(a)** Schreiben Sie $\cos(5x)$ als Linearkombination von Produkten von Potenzen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(b) Schreiben Sie $\sin(x)^5$ als Linearkombination von $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$, wobei $0 \leq k \leq 5$ natürliche Zahlen sind.

7.6. Trigonometrische Funktionen II.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\sin z - \sin w &= 2 \sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\\ \cos z - \cos w &= -2 \sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ streng monoton steigend und bijektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ streng monoton fallend und bijektiv ist.

7.7. Polarkoordinaten in komplexer Form.

(a) Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der komplexe Einheitskreis. Beweisen Sie, dass die Funktion $\operatorname{cis}\colon [0, 2\pi) \to S^1$, $x \mapsto e^{ix}$ bijektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ eindeutige reelle Zahlen $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt, so dass $z = re^{i\varphi}$.

7.8. Bogenmass. Es seien $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ und $z_{n,k} := e^{ikx/n} \in S^1$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Ferner sei

$$L_n := \sum_{k=1}^{n} |z_{n,k} - z_{n,k-1}|$$

die Länge des Polygonzuges $z_{n,0}, z_{n,1}, \ldots, z_{n,n}$. Man zeige:

$$L_n = 2n \cdot \left|\sin\left(\frac{x}{2n}\right)\right| \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} L_n = |x|.$$

Bemerkung: Für grosse $n \in \mathbb{N}^*$ und für $x \in [0, 2\pi]$ wird das Bild von $[0, x]$ unter der Abbildung cis durch den Polygonzug $z_{n,0}, z_{n,1}, \ldots, z_{n,n}$ approximiert. Also kann L_n als Näherungswert für die Länge des im Gegenuhrzeigersinn durchlaufenen Kreisbogens von 1 nach $\operatorname{cis}(x) = e^{ix}$ verstanden werden. Folglich zeigt diese Aufgabe, dass durch die Abbildung $\operatorname{cis}\colon \mathbb{R} \to S^1$ die Gerade $\mathbb{R}$ längentreu auf S^1 "aufgewickelt" wird.