Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

8.1. MC Fragen: Grenzwerte von Funktionen. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Welche der folgenden Aussagen folgt daraus?

- ◯ $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$ existiert
- ◯ $\lim_{x\to\infty}(f(x)g(x) - g(x)) = \infty$
- ◯ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
- ◯ $\lim_{x\to\infty} f(g(x))$ existiert nicht

(b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion. Welche der folgenden Aussagen stimmt *nicht*?

- ◯ Es existiert kein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$.
- ◯ Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ existieren die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.
- ◯ Für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
- ◯ Wenn $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, dann ist f in x_0 stetig.

(c) Sei $f(x) = |e^{ix} - 1|$ für $x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen stimmt *nicht*?

- ◯ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert für alle $x_0 \in \mathbb{R}$
- ◯ $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$
- ◯ $\lim_{x\to\infty}(x + f(x))$ existiert
- ◯ $\lim_{x\to\infty}(xf(x))$ existiert

(d) Seien $f, g\colon (0,1] \to (0,\infty)$ Funktionen, so dass sowohl $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ als auch $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ existieren. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert?

- ◯ $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (0,1]$
- ◯ $\lim_{x\to 0^+} f(x) > \lim_{x\to 0^+} g(x)$
- ◯ $f(x) > g(x)$ für alle $x \in (0,1]$
- ◯ $\lim_{x\to 0^+} f(x) \le \lim_{x\to 0^+} g(x)$

8.2. $\star$ **Operationen und Grenzwerte.** Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, und x_0 ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x),$$
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \Big(\lim_{x\to x_0} f(x)\Big)\cdot\Big(\lim_{x\to x_0} g(x)\Big),$$

wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren.

8.3. Grenzwerte von rationalen Funktionen. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

$\star$**(a)** $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x+2}{x-2}$

(b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x+2}{x^2-4x+4}$

$\star$**(c)** $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

(d) $\lim_{x\to \infty} \frac{(2x-3)(x-4)}{x^2(x+1)}$

(e) $\lim_{x\to \infty} \frac{(x+2)(x-4)}{x(x-1)}$

Stimmen die rechtsseitigen Grenzwerte in (a)–(c) mit dem jeweiligen entsprechenden linksseitigen Grenzwert für $x \to 2^-$ überein?

8.4. Exponentielles Wachstum. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^k} = \infty.$$

8.5. Links- und rechtsseitige Grenzwerte.

(a) Seien $D \subset \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein links- und rechtsseitiger Häufungspunkt von D. Beweisen Sie die Äquivalenz:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert $\iff$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existieren und $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

$\star$**(b)** Sei $\operatorname{sgn}(x)$ definiert als

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x > 0,\\ -1, & \text{wenn } x < 0,\\ 0, & \text{wenn } x = 0.\end{cases}$$

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos(x)^2.$$

Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert von f in $x_0 = 0$. Existiert $\lim_{x\to 0} f(x)$? Falls ja, bestimmen Sie diesen Grenzwert. Falls nein, erklären Sie warum nicht. Ist f eine stetige Funktion?

8.6. Oszillierendes Grenzverhalten. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \sin(1/x)$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $y \in [-1, 1]$ eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ existiert, so dass $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$. Folgern Sie daraus, dass $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ nicht existiert.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} xf(x) = 0$.