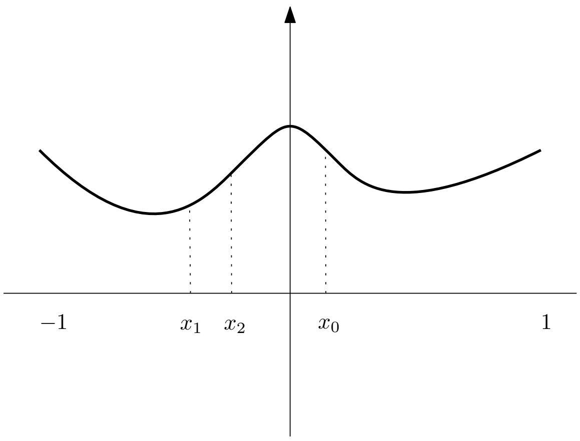
Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

9.1. MC Fragen: Differenzierbarkeit. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

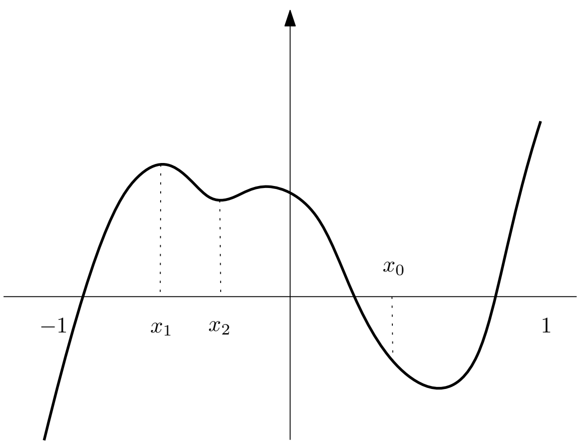
(a) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem folgendem Graphen:



Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ◯ $f'(x_0) > 0$.
- ◯ $f'(x_1) = 0$.
- ◯ $f'(x_2) < 0$.

(b) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit dem folgendem Graphen:



Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ◯ $f'(x_0) > 0$.
- ◯ $f'(x_1) = 0$.
- ◯ $f'(x_2) < 0$.

(c) Definiere für $x > 0$:

$$f(x) := \liminf_{k\to\infty} \Big(\min\{x, x^{-1}\}\Big)^k.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- ◯ f ist stetig und differenzierbar
- ◯ f ist differenzierbar, aber nicht stetig
- ◯ f ist stetig, aber nicht differenzierbar
- ◯ f ist nicht stetig und nicht differenzierbar

(d) Welche der folgenden Aussagen stimmt *nicht*?

- ◯ Ist der Graph einer Funktion eine Gerade, dann ist die Funktion differenzierbar und die Ableitung ist konstant.
- ◯ Ist eine Funktion f das Doppelte einer differenzierbaren Funktion g, dann ist die Ableitung von f das Doppelte der Ableitung von g.
- ◯ Ist $f(0) < 0$ und f in 0 differenzierbar, dann gilt $f'(0) < 0$.

(e) Seien $a < b$ reelle Zahlen, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $f(a) < f(b)$. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ◯ Wenn es für jedes $c \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = c$, dann ist f stetig.
- ◯ Wenn $g \circ f$ und g differenzierbar sind, dann ist f differenzierbar.
- ◯ Wenn f differenzierbar ist, dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

9.2. Berechnung von Ableitungen. Entscheiden Sie, wo die folgenden Funktionen definiert und differenzierbar sind, und berechnen Sie dort die Ableitungen.

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x\ln(x),\\
f_2(x) &= \exp(\exp(x)-1),\\
f_3(x) &= \cos(\ln(x^2+1)),\\
f_4(x) &= \frac{1+x+x^2}{(2x^3+3)^2}.
\end{aligned}
$$

9.3. Ableitung von geraden und ungeraden Funktionen. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heisst *gerade* falls $f(-x)=f(x)$, und *ungerade* falls $f(-x)=-f(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Zeigen Sie: Falls f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann gilt:

(a) f gerade $\implies$ f' ungerade.

(b) f ungerade $\implies$ f' gerade.

9.4. Ableitung einer oszillierenden Funktion.

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sin(1/x)$.

(b) Aus Aufgabe 8.6(b) in der letzten Serie folgt, dass f die folgende stetige Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$ hat:

$$
\tilde{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}
$$

Ist $\tilde{f}$ in $x_0=0$ differenzierbar?

9.5. $\star$ Hyperbel- und Areafunktionen. (vgl. Beispiel 4.2.7 im Skript)

Wir definieren für $x\in\mathbb{R}$ die folgenden *Hyperbelfunktionen*:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, && (\textit{Cosinus hyperbolicus})\\
g(x) &= \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}. && (\textit{Sinus hyperbolicus})
\end{aligned}
$$

(a) Zeigen Sie, dass f und g in $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, und dass Folgendes gilt:

$$
f' = g,\quad g' = f.
$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass g streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

(e) Folgern Sie, dass $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Bijektion ist, und dass g^{-1} differenzierbar ist mit Ableitung

$$(g^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Man bezeichnet $g^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als arsinh (*Areasinus hyperbolicus*).

(f) Zeigen Sie, dass $g(x) > 0$ wenn $x > 0$ und $g(x) < 0$ wenn $x < 0$ ist.

(g) Zeigen Sie, dass f streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$ ist.

(h) Sei f_1 die Einschränkung der Funktion f auf $[0, \infty)$. Zeigen Sie, dass f_1 eine Bijektion von $[0, \infty)$ nach $[1, \infty)$ ist. Man bezeichnet $f_1^{-1}\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ als arcosh (*Areacosinus hyperbolicus*).

(i) Zeigen Sie, dass f_1^{-1} in $(1, \infty)$ differenzierbar ist, und dass

$$(f_1^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$$

für alle $y > 1$.

(j) Zeichnen Sie die Graphen von $\sinh, \cosh, \operatorname{arsinh}, \operatorname{arcosh}$ mit einem Computeralgebrasystem Ihrer Wahl.