Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

10.1. MC Fragen: Arcusfunktionen, Differenzierbarkeit und Konvexität. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Für alle $y \in [-1, 1]$ gilt $\arccos(y) = \pi - \arcsin(y)$.

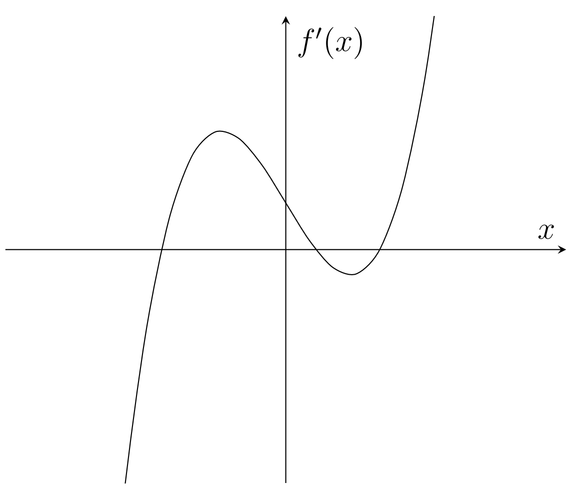
- ◯ Wahr
- ◯ Falsch

(b) Es gibt eine beschränkte und differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- ◯ Wahr
- ◯ Falsch

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit Ableitung wie im folgenden Graphen rechts. Welche der folgenden Aussagen stimmt *nicht*?

- ◯ f ist nicht monoton
- ◯ f' besitzt eine Nullstelle
- ◯ f'' besitzt eine Nullstelle
- ◯ f ist konvex



(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Welche der folgenden Implikationen stimmt *nicht*?

- ◯ f konvex $\implies f'' \geq 0$
- ◯ $f'' \geq 0 \implies f$ konvex
- ◯ f streng konvex $\implies f'' > 0$
- ◯ $f'' > 0 \implies f$ streng konvex

10.2. Monotonie und Konvexität. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Teilmengen des Definitionsbereichs, in denen sie (i) monoton steigend, (ii) monoton fallend, (iii) konvex sind.

⋆**(a)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 6x^2 - 1$

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

10.3. Regel von L'Hospital. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

⋆**(a)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin(x^2 - x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x^2 - \sin(x)}$

⋆**(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 + x - 12}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(2x)}{x^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

10.4. Konkave Funktionen. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heisst (*streng*) *konkav*, falls $-f$ (streng) konvex ist. Formulieren Sie Aussagen für konkave Funktionen, die den Aussagen über konvexe Funktionen in Lemma 4.2.15, Satz 4.2.16 und Korollar 4.2.17 entsprechen (ohne Beweise).

10.5. ⋆ Minima von konvexen Funktionen. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von f ein globales Minimum ist.

10.6. Youngsche Ungleichung. Sei $p > 1$ eine reelle Zahl.

(a) Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $q > 1$ existiert, so dass $1/p + 1/q = 1$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt:

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

Hinweis: Verwenden Sie die Konvexität der Funktion $-\ln(x)$ in geeigneter Weise.