Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

11.1. MC Fragen: Höhere Ableitungen, Funktionenfolgen, lokale Extrema.
Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Welche der folgenden Implikationen stimmt *nicht* für $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$?

- ◯ f ist differenzierbar $\implies$ f ist stetig differenzierbar
- ◯ f ist differenzierbar $\implies$ f ist stetig
- ◯ f ist differenzierbar und f' kann als konvergente Potenzreihe dargestellt werden $\implies$ f ist glatt
- ◯ f ist zweimal differenzierbar $\implies$ f ist stetig differenzierbar

(b) Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}$, die gleichmässig gegen eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergieren. Welche der folgenden Aussagen stimmt?

- ◯ Die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen f'.
- ◯ Die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\geq 1}$ konvergiert punktweise in $\mathbb{R}$ gegen f'.
- ◯ Wenn die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\geq 1}$ gleichmässig in $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann gilt $f' = p$.

(c) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(1/2) = 2, \quad f'(1/2) = 0, \quad f''(1/2) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in $1/2$.
- ◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in $1/2$.
- ◯ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in $1/2$.
- ◯ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

(d) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.

◯ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.

◯ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

(e) Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so dass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.

◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum in 0.

◯ Die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in 0.

◯ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

11.2. n-te Ableitung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die n-te Ableitung für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 3$

$\star$**(b)** $g(x) = \dfrac{1}{3x-1}$ für $x \neq \dfrac{1}{3}$

(c) $h(x) = \sin(x)^2$

11.3. Darstellung als Potenzreihe. Sei $f(x) = \exp(x^2)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass es Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

(b) Folgern Sie, ohne explizit die Ableitungen zu berechnen, dass für $j \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \text{ ungerade ist,} \\ \frac{j!}{(j/2)!}, & \text{falls } j \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

11.4. Lokale Extrema. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen alle lokalen Extrema und entscheiden Sie, ob es sich um lokale Maxima oder Minima handelt.

(a) $f(x) = x\exp(1/x^2)$ für $x > 0$

$\star$**(b)** $g(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 3}$ für $x > -2$

11.5. Taylorpolynom. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils das Taylorpolynom der Ordnung 3 im Punkt x_0.

$\star$**(a)** $f(x) = \ln(1 + (1 + x)^2), \quad x_0 = -1$

(b) $g(x) = \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x_0 = 0$

11.6. Glatter Niveauwechsel. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x), & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Lesen Sie im Buch von Königsberger das Beispiel auf Seite 156 in Kapitel 9.6 (LINK) und vollziehen Sie nach, dass f glatt in $\mathbb{R}$ ist mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Wir definieren die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(x) = e^e f(f(1) - f(1 - x))$ für $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

(i) F ist glatt in $\mathbb{R}$,

(ii) $F(x) = 0$ für alle $x \leq 0$,

(iii) $F(x) = 1$ für alle $x \geq 1$,

(iv) F ist in $[0, 1]$ streng monoton wachsend.

(c) Zeichnen Sie den Graphen von F im Intervall $[-1, 2]$ mit einem Computeralgebrasystem Ihrer Wahl.