Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

12.1. MC Fragen: Riemann-Integral. Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Welche Eigenschaft einer Funktion auf einem kompakten Intervall impliziert *nicht* die Integrierbarkeit?

- ◯ Beschränktheit
- ◯ Stetigkeit
- ◯ Monotonie
- ◯ Differenzierbarkeit

(b) Was ist der Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| \,\mathrm{d}x$?

- ◯ 0
- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ 1
- ◯ 2

(c) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, integrierbare Funktion. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(\xi).$$

- ◯ Die Aussage ist immer wahr.
- ◯ Die Aussage ist wahr, wenn f monoton ist.
- ◯ Die Aussage ist wahr, wenn f stetig ist.
- ◯ Keine der obigen Antwortmöglichkeiten ist richtig.

(d) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche der folgenden Formeln ist richtig?

- ◯ $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$
- ◯ $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b + \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
- ◯ $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$
- ◯ $\displaystyle\int_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

(e) Seien $a < b$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Welche der folgenden Formeln ist richtig?

○ $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

○ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$

○ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$

○ $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$

(f) Was ist die Ableitung nach x von $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^1 \sin(t)^2\cos(t)^2\,\mathrm{d}t$?

○ $G'(x) = \displaystyle\int_{2x}^1 \sin(t)^2\cos(t)^2\,\mathrm{d}t$

○ $G'(x) = -\sin(x^2)^2\cos(x^2)^2$

○ $G'(x) = 2x\sin(x^2)^2\cos(x^2)^2$

○ $G'(x) = -2x\sin(x^2)^2\cos(x^2)^2$

12.2. Integral einer Treppenfunktion.

(a) Sei $c \in \mathbb{R}$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $f(x) = c$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie anhand der Definition, dass f auf $[a,b]$ integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a).$$

Bemerkung: Es wird hier nicht angenommen, dass $f(a)$ und $f(b)$ auch gleich c sind.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^4 \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x,$$

wobei $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet.

12.3. Stammfunktionen.

$\star$**(a)** Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ und $\psi\colon J \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, so dass $\psi(J) \subset I$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zu

$$x \mapsto \varphi'(\psi(x))\psi'(x), \quad x \in J.$$

Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$\star$**(b)** $(x^2 - 2x + 2)^{2024}(2x - 2), \quad x \in \mathbb{R}$

(c) $-e^{1/x}\dfrac{1}{x^2}, \quad x \in (0, \infty)$

(d) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$

$\star$**(e)** $\tan(x), \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$

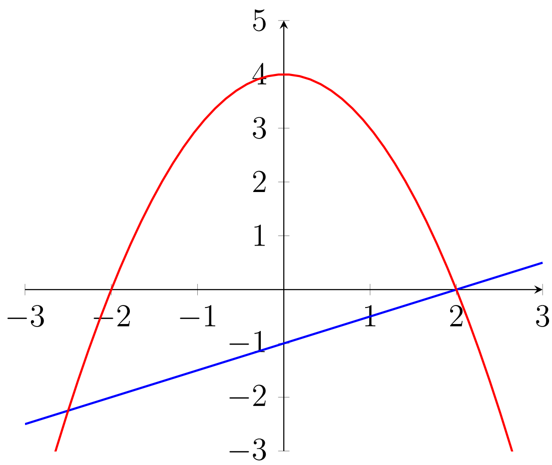
12.4. Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen.

(a) Lesen Sie die Definition des Flächeninhalts unter dem Graphen einer Funktion in Anwendung 5.4.7 im Skript. Seien nun $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte, integrierbare Funktionen mit $g \leq f$. Welche Formel ergibt den Flächeninhalt des Gebiets

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

zwischen den Graphen der Funktionen g und f?

$\star$**(b)** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebiets, das durch die blaue Gerade und die rote Parabel begrenzt wird, wie im Bild unten gezeigt.



12.5. Integrale von ungeraden Funktionen. Sei $a > 0$ und $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, dass f *ungerade* ist, also $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Substitutionsregel auf geeignete Weise.

12.6. $\star$ Rekursive Berechnung eines Integrals. Für zwei ganze Zahlen $p, q \geq 0$ definieren wir

$$I(p,q) := \int_0^1 x^p \, (1-x)^q \, \mathrm{d}x.$$

(a) Bestimmen Sie durch partielle Integration eine Rekursionsrelation zwischen den Grössen $I(p+1,q)$ und $I(p,q+1)$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$I(p,q) = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$