Die Aufgaben dieser Serie werden nicht korrigiert.

14.1. MC Fragen: Integrale, Summen, Konvergenz von Funktionenfolgen.
Wählen Sie die einzige richtige Antwort.

(a) Sei $f\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Teilintervall von $[1,\infty)$ beschränkt und integrierbar ist. Unter welcher der folgenden Bedingungen konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)?$$

- ◯ f ist monoton fallend
- ◯ f ist beschränkt
- ◯ $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert
- ◯ Keine der obigen Bedingungen allein impliziert die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty f(n)$

(b) Gilt die Gleichheit

$$\int_1^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}?$$

- ◯ Ja
- ◯ Nein

(c) Seien $g, g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin(2\pi x^{-1}), & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

und

$$g_n(x) = \begin{cases} \inf\limits_{0 \le t < \frac{1}{n}} g(t), & 0 \le x < \frac{1}{n}, \\ \inf\limits_{\frac{1}{n} \le t < \frac{2}{n}} g(t), & \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n}, \\ \dots \\ \inf\limits_{\frac{j}{n} \le t < \frac{j+1}{n}} g(t), & \frac{j}{n} \le x < \frac{j+1}{n}, \\ \dots \\ \inf\limits_{\frac{n-1}{n} \le t \le 1} g(t), & \frac{n-1}{n} \le x \le 1. \end{cases} \qquad (n \ge 2).$$

Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) $\exists x_0 \in (0,1)$ mit $g'(x_0) = 0$.

◯ Wahr

◯ Falsch

(ii) Die Funktionenfolge $(g_n)_{n\geq 2}$ konvergiert in $[0,1]$ gleichmässig gegen g.

◯ Wahr

◯ Falsch

(iii) g_n und g sind integrierbar und $\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ für jedes $n \geq 2$.

◯ Wahr

◯ Falsch

(iv) g_n und g sind integrierbar und es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

◯ Wahr

◯ Falsch

14.2. Leibniz-Reihe. Geben Sie einen vollständigen Beweis der Gleichheit

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

(vgl. Beispiel 5.5.5 im Skript).

14.3. Vergleichssatz für uneigentliche Integrale. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $A = \inf(J)$, $B = \sup(J)$, und seien $f, g\colon J \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf jedem kompakten Teilintervall von J beschränkt und integrierbar sind. Zeigen Sie:

$$0 \leq |f| \leq g \text{ und } \int_A^B g(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert} \implies \int_A^B f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert}$$

(vgl. Lemma 5.8.3 im Skript).

14.4. Uneigentliche Integrale I. Zeigen Sie, dass die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren:

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^\infty \frac{x^2+1}{x^4+2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Hinweis: Für das erste Integral kann man verwenden, dass die Funktion $x^3 e^{-x/2}$ auf $[0,\infty)$ beschränkt ist.

14.5. Uneigentliche Integrale II. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie deren Werte (falls konvergent):

(a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{|x|\ln(|x|)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^3}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin(t)}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

(h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^x}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$

14.6. Uneigentliche Integrale III.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_1^x \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} + \frac{1}{4\pi}\int_1^{x^2} \frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}}\,\mathrm{d}y$$

für alle $x \geq 1$.

Hinweis: Verwenden Sie eine Substitution und integrieren Sie danach partiell.

(b) Folgern Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \cos(\pi t^2)\,dt$$

konvergiert, obwohl $\cos(\pi t^2)$ für $t \to \infty$ *nicht* gegen Null konvergiert.

14.7. Asymptotische Äquivalenz. Seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ Folgen positiver reeller Zahlen, so dass $a_n \sim b_n$ für $n \to \infty$ und $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \alpha$ für eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} b_n c_n = \alpha$ gilt.

14.8. Konvexe Funktionen und Tangenten. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare konvexe Funktion und g die Tangente an f in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$. Zeigen Sie, dass die Tangente g unter der Funktion f liegt, also dass $g(x) \leq f(x)$ für alle $x \in (a,b)$.

14.9. Wallissches Produkt. In dieser Aufgabe wollen wir die folgende, als *Wallis-Produkt* bekannte Gleichheit beweisen:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdot\ldots\,.\end{aligned}$$

Führen Sie dazu die folgenden Schritte durch:

(a) Betrachten Sie das Integral $A_n = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$A_0 = \frac{\pi}{2},\ A_1 = 1,\ A_n = \frac{n-1}{n}A_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = 1.$$

(c) Zeigen Sie, dass $A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n}$ und folgern Sie damit aus (b), dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1.$$

(d) Verwenden Sie die Rekursionsformel für A_n um zu zeigen, dass

$$\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(e) Folgern Sie aus (c) und (d) die Wallissche Produktdarstellung von $\frac{\pi}{2}$.

14.10. Gammafunktion. Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_0^1 e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ genau dann konvergiert, wenn $s > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ für jedes $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Die Teile (a) und (b) zeigen zusammen, dass $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\,\mathrm{d}x$ genau für $s > 0$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Gamma(1/2)$ gilt.

Hinweis: Schreiben Sie $\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ und verwenden Sie dann eine Substitution.