D-INFK	**Analysis I**	**ETH Zürich**
Prof. Marc Burger	Prüfung	FS 2021

Multiple-Choice:

1) (**12 Punkte**)

a) Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Kreuze die wahren Aussagen an:

i) $f \circ g$ ist definiert.
ii) Falls f beschränkt ist, ist auch $f \circ g$ beschränkt.
iii) Falls g unbeschränkt ist und keine Nullstellen hat, dann ist $\frac{f}{g}$ beschränkt.
iv) Für jede reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.
v) Die Funktion $f \cdot g$ ist nicht immer definiert.
vi) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen. Kreuze die wahren Aussagen an:

i) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend ist, dann ist $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.
ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.
iii) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, beide *nicht* konvergieren, dann konvergiert $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht*.
iv) Falls die Summe $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ konvergiert, dann konvergiert die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.
v) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen. Kreuze die wahren Aussagen an:

i) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert absolut.

iii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall k, l \geq N \text{ gilt:} \left| \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{l} a_n \right| < \varepsilon.$$

iv) Das Cauchy-Produkt von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!},$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, ist gegeben durch

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a+b)^l}{l!}.$$

v) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

d) Seien $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$ stetige Funktionen. Kreuze die wahren Aussagen an:

i) $f \circ g$ und $g \circ f$ sind stetig.
ii) f besitzt eine Nullstelle, falls f *nicht* konstant ist.
iii) $f([0,1])$ ist beschränkt.
iv) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

e) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

i) Falls f stetig ist, dann ist f differenzierbar.
ii) Falls $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x)^2$ differenzierbar ist, dann ist f differenzierbar.
iii) Falls f stetig differenzierbar mit $f(0) = 1$ und $f(1) = 1$ ist, dann existiert ein $x_0 \in [0,1]$ so dass $f'(x_0) = 0$.
iv) Keine der obigen Aussagen trifft zu.

Aufgaben:

2) (**6 Punkte**) Berechne

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 + \sin(x)^3 \, dx.$$

3) (**4 Punkte**) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \int_{-1}^{x} 5^t \, dt.$$

a) Berechne die Ableitung $f'(x)$ und schliesse, dass f stetig differenzierbar ist.

b) Begründe, wieso f injektiv ist.

4) (**6 Punkte**) Berechne

a)

$$\int_0^1 x e^{5x^2-1} \, dx,$$

b)

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx.$$

5) (**4 Punkte**) Berechne folgende Grenzwerte (ohne Begründung):

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2},$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+5} - x.$$

6) (**6 Punkte**) Sei

$$f\colon]1,+\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

Bestimme alle Extrema und bestimme, ob es sich dabei um lokale (resp. globale) Maxima oder Minima handelt.

7) (**6 Punkte**) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Hinweis: Zur Erinnerung: $a_n \approx b_n$ bedeutet $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

8) (**8 Punkte**) Analysiere folgende Funktionen f auf strenge Monotonie und bestimme falls möglich die Inverse f^{-1}:

a)

$$f(x) = \ln(x-17) + 2,\ x \in]17, +\infty[,$$

b)

$$f(x) = \tan(x^3),\ x \in \left]\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right[$$

9) (**6 Punkte**) Bestimme die Stetigkeitspunkte der folgenden Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} 1 - 2x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x - 3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

10) (**6 Punkte**) Berechne folgende Ableitung:

$$\left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right)^{(10)} .$$