ANALYSIS I PRÜFUNG, 09.08.2022

PROFESSOR ÖZLEM IMAMOGLU

Aufgabe 1. (10 Punkte) Multiple-Choice-Aufgaben. Füllen Sie bei allen richtigen Aussagen das Kästchen vollständig aus (nicht ankreuzen). Verwenden Sie Tipp-Ex, falls Sie Ihre Antwort korrigieren möchten. Bei jeder Teilaufgabe ist **genau eine** Antwort korrekt. Falls mehr als ein Kästchen pro Teilaufgabe ausgefüllt ist, werden dafür keine Punkte verteilt.

(1) Betrachten Sie die folgende stückweise definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) := \begin{cases} 2e^x - 1, & \text{falls } x \leq \log(2) \\ ax + 2, & \text{falls } x > \log(2) \end{cases},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Für welche Werte von a ist f stetig in $x = \log(2)$?

A $a = \log(2)$

B $a = \frac{1}{\log(2)}$

C $a = 0$

D $a = 2\log(2)$

(2) Man betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := e^{-\frac{nx^2}{2}}.$$

A Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert überall punktweise, aber nicht gleichmässig gegen eine Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

B Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert überall gleichmässig gegen eine Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

C Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert in einem Punkt $x \in [-1,1]$.

(3) Betrachten Sie die Menge $A \subset \mathbb{R}$, welche gegeben ist durch:

$$A := \left\{ \frac{1-n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{n+1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Hierbei ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A A ist beschränkt.

B $\sup A = 1$

C $\min A = -1$

(4) Betrachten Sie das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x[\log(x)]^3} dx.$$

A Das Integral konvergiert.

B Das Integral divergiert.

(5) Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\pi i}{3}\right)^n$$

hat den folgenden Wert:

A $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

B $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

C $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

D $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

(6) Betrachten Sie die folgende Potenzreihe für $|x| < 1$:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^k.$$

Welche der folgenden Funktionen besitzt genau diese Potenzreihenentwicklung?

A $\frac{2x^2}{(1-x)^3}$

B $\frac{2x}{(1-x)^3}$

C $\frac{2x^2}{(1-x)^2}$

D $\frac{2x}{(1-x)^2}$

(7) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch:

$$f(x) := \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

Kreuzen Sie die korrekten Aussagen an:

A Die Funktion $f(x)$ ist in $x = 0$ differenzierbar.

B Die Funktion $f(x)$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar.

(8) Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad a_n := \frac{4n^6 + 5n}{3n^\alpha + 2}.$$

A Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$, dann $\alpha = 6$.

$\boxed{\text{B}}$ Wenn $\alpha > 10$, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$\boxed{\text{C}}$ Wenn $\alpha < 0$, dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{2}$.

(9) Betrachten Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{1+k^2}.$$

$\boxed{\text{A}}$ Diese Reihe divergiert.

$\boxed{\text{B}}$ Diese Reihe konvergiert absolut.

$\boxed{\text{C}}$ Diese Reihe konvergiert, aber nicht absolut.

Aufgabe 2. (10 Punkte) Wahr-Falsch-Aussagen. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist. Füllen Sie das entsprechende Feld aus.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit Ableitung $f'(x)$, welche gegeben ist durch:

$$f'(x) = x^2(x+1)e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Ferner sei der Wert von f in 0 genau $f(0) = 0$. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch sind und ausfüllen Sie das entsprechende Feld auf dem Multiple-Choice-Antwortbogen.

		Wahr	**Falsch**
1.	Die Funktion f hat einen Sattelpunkt bei $x = 0$.	A	B
2.	Die Funktion f ist monoton wachsend auf $[0, 1]$.	A	B
3.	Die Funktion f ist überall positiv, d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	A	B
4.	Die Funktion f ist konvex auf dem Interval $[-1, 0]$.	A	B

(b) Sei $(a_n)_n$ eine Folge Reellen Zahlen. Bestimmen Sie für jede der folgenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch sind:

		Wahr	**Falsch**
5.	Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, und $(b_n)_n$ beschränkt ist, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.	A	B
6.	Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert und $(b_n)_n$ beschränkt ist, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.	A	B
7.	Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent ist, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.	A	B
8.	Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ auch konvergent.	A	B
9.	Ist $(a_n)_n$ konvergent, so ist $(a_n - a_{n+1})_n$ eine Nullfolge.	A	B
10.	Ist $(a_n - a_{n+1})_n$ eine Nullfolge, so ist $(a_n)_n$ konvergent.	A	B

Aufgabe 3. (17 Punkte) Kurze Aufgaben: Limes, differenzierbare Funktionen und das Riemann Integral. In dieser Aufgabe werden keine Teilpunkte vergeben und der Rechenweg wird nicht beurteilt. Schreiben Sie Ihre Antwort auf die jeweilige Linie.

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4 + 7n^2} - n^2 = \underline{\hspace{4cm}}$$

Lösung.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^4 + 7n^2} - n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 7n^2 - n^4}{\sqrt{n^4 + 7n} + n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{7n^2}{\sqrt{n^4 + 7n} + n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{7}{\sqrt{1 + \frac{7}{n^3}} + 1} = \frac{7}{2}$$

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 6} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 36} = \underline{\hspace{4cm}}$$

Lösung.

$$\lim_{x\to 6} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 36} = \lim_{x\to 6} \frac{\pi\cos(\pi x)}{2x} = \frac{\pi}{12}.$$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} \, \mathrm{d}\, x = \underline{\hspace{4cm}}$$

Lösung. Wir verwenden die Substitution $u = e^x$:

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 1} \, \mathrm{d}\, x = \int \frac{1}{u^2 + 2u + 1} \, \mathrm{d}\, x = \int \frac{1}{(u+1)^2} \, \mathrm{d}\, x$$
$$= -\frac{1}{u+1} + C = -\frac{1}{e^x + 1} + C.$$

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}\, x = \underline{\hspace{4cm}}$$

Lösung. Wir integrieren partiell:

$$\int x \ln x \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\int \frac{3x + 4}{x(x+2)} \, \mathrm{d}\, x = \underline{\hspace{4cm}}$$

Lösung. Zuerst finden wir A und B, so dass

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x} = \frac{3x+4}{x(x+2)}.$$

Wir bekommen $A = 1$, $B = 2$ und

$$\int \frac{3x+4}{x(x+2)} \,\mathrm{d}\, x = \int \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x} \,\mathrm{d}\, x = \ln(x+2) + 2\ln x + C.$$

(f) (3 Punkte) Sei $f(x) = x\cos(x^3)$. Die Taylor-Entwicklung von f mit Entwicklungsstelle 0 bis zur 3. Ordnung ist

$$\sum_{n=0}^{3} \alpha_n x^n + f^{(4)}(\eta)\frac{x^4}{4!}.$$

Berechnen Sie α_3.

$$\alpha_3 = \rule{5cm}{0.4pt}$$

Lösung. Die Taylor Entwicklung von $\cos(x^3)$ ist $\cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{6} + \dots$. Deshalb gilt:

$$x\cos(x^3) = x - \frac{x^7}{2} + \frac{x^{13}}{6} + \dots$$

und dann $\alpha_3 = 0$.

(g) (4 Punkte) Sei

$$g(x) = \int_1^{\exp(x)} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Finden Sie die Gleichung der Tangente von $g(x)$ bei $x = 0$.

Die Gleichung der Tangente von $g(x)$ ist

$$y = \rule{5cm}{0.4pt}$$

Lösung. Wir sehen, dass

$$g(0) = \int_1^1 \cos(\pi t^2)\ \mathrm{d}\, t = 0;$$
$$g'(0) = \exp(x)\cos(\pi \exp(2x))\big|_{x=0} = \cos(\pi) = -1.$$

Deshalb ist die Tangente Gleichung von g bei $x = 0$

$$y(x) = -x$$

Aufgabe 4. (8 Punkte) Standard Aufgabe: Reihen.

Sei (a_n) eine reelle Nullfolge. Die Folge (b_n) sei definiert durch

$$b_0 := \frac{1}{2}a_0, \text{ und } b_k := \frac{1}{2}a_{2k-2} + a_{2k-1} + \frac{1}{2}a_{2k}, \ \forall k \geq 1.$$

(a) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die Partialsummen

$$b_0, b_0 + b_1, b_0 + b_1 + b_2 \text{ und } b_0 + b_1 + b_2 + b_3$$

direkt in Abhängigkeit von (a_n).

(b) **(3 Punkte)** Finden Sie eine allgemeine Formel für die Partialsumme

$$\sum_{k=0}^{m} b_k$$

für beliebiges $m \geq 0$ in Abhängigkeit von (a_n). Beweisen Sie auch, dass Ihre Formel tatsächlich gilt.

(c) **(3 Punkte)** Beweisen Sie, dass beide Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ entweder divergieren oder mit gleichem Grenzwert konvergieren.

Lösung.

(a) Man sieht direkt durch Einsetzen:

$$b_0 = \frac{1}{2}a_0$$
$$b_0 + b_1 = a_0 + a_1 + \frac{1}{2}a_2$$
$$b_0 + b_1 + b_2 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \frac{1}{2}a_4$$
$$b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \frac{1}{2}a_6$$

(b) Dank der vorherigen Teilaufgabe kommt man zur Vermutung:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \frac{1}{2}a_{2n} + \sum_{k=0}^{2n-1} a_k$$

Dies kann man per Induktion zeigen, die Fälle $n = 0, 1, 2, 3$ waren Teil der vorherigen Teilaufgabe. Dann folgt nun, wenn die Formel für ein $n \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} b_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} a_k + \frac{1}{2}a_{2n} + b_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} a_k + \frac{1}{2}a_{2n} + \frac{1}{2}a_{2n} + a_{2n+1} + \frac{1}{2}a_{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{2n+1} a_k + \frac{1}{2}a_{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{2(n+1)-1} a_k + \frac{1}{2}a_{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Daher gilt die allgemeine Formel gemäss Induktion.

(c) Wir wissen nun also gemäss der vorherigen Teilaufgabe:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k + \frac{1}{2}a_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k - \frac{1}{2}a_{2n}$$

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ existiert, so folgt natürlich, da (a_{2n}) eine Nullfolge ist:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{2n-1} a_k + \frac{1}{2}a_{2n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n-1} a_k + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a_{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k
\end{aligned}$$

Analog sieht man, dass wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ existiert, so konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, zumal die Differenz zu den Partialsummen von (b_n) beliebig klein wird, denn (a_n) ist eine Nullfolge.

Aufgabe 5. (6 Punkte) Standard Aufgabe: Differenzialrechnung.

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft, dass $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

(a) **(3 Punkte)** Definieren Sie die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ als

$$g(x) := \arctan(f(x)).$$

Begründen Sie, warum g auch differenzierbar ist und bestimmen Sie $g(0), g(1)$ sowie die Ableitung g'.

(b) **(3 Punkte)** Zeigen Sie, dass

$$\exists\, c \in [0,1] : \quad f'(c) = \frac{\pi}{4}\left(1 + f(c)^2\right).$$

Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz und Teilaufgabe a).

Lösung.

(a) Die Funktion g ist stetig und differenzierbar auf $[0,1]$ als Komposition zweier differenzierbarer Funktionen. Man beachte, dass $\arctan(f(x))$ wohldefiniert ist, da arctan auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Zudem finden wir:

$$g(0) = \arctan(f(0)) = \arctan(0) = 0, g(1) = \arctan(f(1)) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Die Ableitung lässt sich durch die Kettenregel bestimmen:

$$g'(x) = \arctan'(f(x))f'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}.$$

(b) Wir wollen zeigen, dass:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{f'(c)}{f(c)^2 + 1} = g'(c)$$

Wir wissen zudem:

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{\pi}{4}.$$

Also folgt die Existenz eines solchen $c \in]0,1[$ dank des Mittelwertsatzes.