Aufgaben und Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

Für jede Frage ist **nur eine Option** richtig. Es gibt **keine** negativen Punkte.

1.MC1 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Was ist die konkrete Bedeutung der folgenden Aussage?

$$\forall T \geq 1, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, a_n < -T.$$

(A) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.
(B) $\lim_{n\to+\infty} a_n$ existiert nicht.
(C) $\lim_{n\to+\infty} a_n > 0$.
(D) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty$.

Lösung:

(A)

1.MC2 [1 Punkt] Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche mathematische Aussage bedeutet, dass (a_n) das Cauchy-Kriterium erfüllt?

(A) $\exists \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.
(B) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \exists m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.
(C) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.
(D) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \geq 1, \forall n \geq N, \forall m \geq N, |a_n - a_m| > \varepsilon$.

Lösung:

(C)

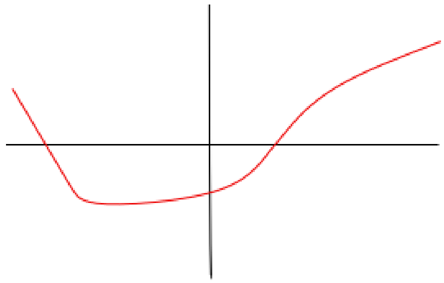
1.MC3 [1 Punkt] Welche Formel ist richtig für alle Funktionen f, g differenzierbar von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?

(A) $(f \circ g)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.
(B) $(f \circ g)'(x) = f(x)g'(f(x))$.
(C) $(f \circ g)'(x) = g'(f(x))$.
(D) $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$.

Lösung:

(D)

1.MC4 [1 Punkt] Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit folgendem Graph.



Welche der folgenden Aussagen gilt?

(A) f ist konvex.

(B) f' hat drei Nullstellen.

(C) f hat zwei Nullstellen.

(D) $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [-1,1]$.

Lösung:

(C)

1.MC5 [1 Punkt] Sei (a_n) eine Folge von positiven reellen Zahlen, die das Cauchy-Kriterium erfüllt. Welche der folgenden Aussagen trifft zu?

(A) Die Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist konvergent.

(B) Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.

(C) Die Folge $(1/a_n)$ ist beschränkt.

(D) Die Folge (a_n) hat eine konvergente Teilfolge.

Lösung:

(D)

1.MC6 [1 Punkt] Sei $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) Es gibt ein lokales Maximum von f.

(B) Es gilt $f(1/n) \to f(0)$, wenn $n \to +\infty$.

(C) Es gibt eine Folge (a_n) mit $-1 < a_n < 1$, sodass $a_n \to 1$ wenn $n \to +\infty$, aber die Folge $f(a_n)$ konvergiert nicht.

(D) f ist beschränkt.

Lösung:

(B)

1.MC7 [1 Punkt] Sei $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \pi.$$

(A) $f(1/n) \to \pi$, wenn $n \to +\infty$.

(B) $f(x/2) \to \pi/2$, wenn $x \to 0$.

(C) $e^x f(x) \to \pi$, wenn $x \to 0$.

(D) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in]-1,1[, |x| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - \pi| < \delta$.

Lösung:

(C)

1.MC8 [1 Punkt] Seien f und g stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Angenommen, dass $f(x) \to +\infty$ und $g(x) \to -\infty$ wenn $x \to 0$. Welche der folgenden Tatsachen ist *nicht* möglich?

(A) $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = -1$.

(B) $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = +\infty$.

(C) $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$.

(D) $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = -\infty$.

Lösung:

(B)

1.MC9 [1 Punkt] Sei $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbar Funktion, sodass

$$f(-1/2) = f(0) = f(1/2) = 0.$$

Welche der folgenden Tatsachen ist richtig?

(A) f' hat genau drei Nullstellen.

(B) f' hat mindestens zwei Nullstellen.

(C) f' hat höchstens zwei Nullstellen.

(D) f' hat mindestens drei Nullstellen.

Lösung:

(B)

Aufgabe 2

Bitte tragen Sie Ihre Antwort in das Antwortheft ein. **Es wird nur das Endergebnis bewertet**.

2.A1 [1 Punkt] Bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergent sind oder nicht (die Summe, wenn konvergent, ist nicht erforderlich)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n^2}}{n!+1}$$
$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+12}$$

Lösung:

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n^2}}{n!+1}$ konvergiert. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+12}$ konvergiert nicht.

2.A2 [1 Punkt] Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to+\infty} \exp(\sqrt{9n-1} - 3\sqrt{n}).$$

Lösung:

$\lim_{n\to+\infty} \exp(\sqrt{9n-1} - 3\sqrt{n}) = \exp(0) = 1$

2.A3 [1 Punkt] Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2}$$
$$f(x) = \sin(\exp(x))$$

Lösung:

$\left(\frac{2x+1}{x^4+2}\right)' = \frac{-6x^4-4x^3+4}{(x^4+2)^2}$ und $(\sin(\exp(x)))' = \cos(\exp(x))\exp(x)$.

2.A4 [1 Punkt] Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, oder geben Sie an, dass der Grenzwert nicht existiert

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(\cos(x^2-1))}{x-e^x}$$
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - e^{x^2}}{\sin(x^2-x)}\right)^6$$
$$\lim_{x\to+\infty} x\cos(x).$$

Lösung:

$\lim_{x\to 1} \frac{\log(\cos(x^2-1))}{x-e^x} = \frac{\log(1)}{1-e} = 0$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{x^2}}{\sin(x^2-x)}\right)^6 = 1$, $\lim_{x\to+\infty} x\cos(x)$ existiert nicht.

2.A5 [1 Punkt] Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^n.$$

Lösung:

Der Konvergenzradius ist gleich $1/27$.

2.A6 [1 Punkt] Finden Sie das Maximum und das Minimum der folgenden Funktion im Intervall $[-1, 2]$

$$f(x) = e^x/(x^2+1)$$

Lösung:

$\max = f(2) = e^2/5$ und $\min = f(-1) = 1/(2e)$.

2.A7 [1 Punkt] Berechnen Sie die Taylor-Approximation der dritten Ordnung der Funktion

$$f(x) = \cos(\pi\sqrt{x}), \quad \text{bei } x = 1.$$

Lösung:

$-1 + \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 - \frac{\pi^2}{16}(x-1)^3$.

2.A8 [1 Punkt] Berechnen Sie eine Stammfunktion der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \frac{x}{x^4+1},$$

definiert ist.

Lösung:

$\frac{1}{2}\arctan(x^2)$

2.A9 [1 Punkt] Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 x\log(x^2+1)dx.$$

Lösung:

$\log(2) - \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3

Bitte tragen Sie Ihre Antwort in das Antwortheft ein. **Jede Behauptung in Ihrer Antwort muss begründet werden.**

3.A1 [4 Punkte] Die reelle Folge (a_n) sei rekursive gegeben durch

$$a_1 = \sqrt{2}$$
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \text{ wenn } n \geq 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass (a_n) immer wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass $a_n \leq 2$ für jedes $n \geq 1$.

(c) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend ist.

(d) Folgern Sie, dass (a_n) konvergent ist, und berechnen Sie den Grenzwert.

Lösung:

(a) Die Folge ist wohldefiniert wenn $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Induktionanfang: $a_1 = \sqrt{2} \geq 0$. Induktionschritt: wenn $a_n \geq 0$ ist, dann $a_{n+1} \geq 0$ ist. Das ist wahr: $a_n \geq 0 \Rightarrow a_n + 2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a_n + 2} = a_{n+1} \geq 0$. Wir haben gezeigt, dass die Folge (a_n) wohldefiniert ist.

(b) Induktionanfang: $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$. Induktionschritt: wenn $a_n \leq 2$ ist, dann $a_{n+1} \leq 2$ ist. Das is wahr: $a_{n+1}^2 = a_n + 2 \leq 2 + 2 = 4 \Rightarrow a_{n+1} \leq 2$, weil $a_n \geq 0$ aus Punkt (a) ist.

(c) Es ist genung zu zeigen, dass die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ monoton wachsend ist: $f'(x) = 1/\sqrt{x+1} > 0$.

(d) Die Folge ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann konvergiert (a_n) mit Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ (Weierstrass). Nach $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{a_n + 2} = \sqrt{\ell + 1}$, und $\ell \geq a_n \geq 0$ folgt es, dass $\ell = 2$ ist.

3.A2 [7 Punkte] Sei $f \colon]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x) = x\sqrt{1-x},$$

(a) Erklären Sie, warum f stetig ist.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert
$$\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

(c) Erklären Sie, warum f glatt in $]-\infty, 1[$ ist, und berechnen Sie $f'(x)$ für $x < 1$.

(d) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert
$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f'(x).$$

(e) Berechnen Sie die Werte von $x < 1$, bei denen $f'(x) = 0$ ist.

(f) Zeigen Sie, dass

$$f(x) \leq \frac{2}{3^{3/2}}$$

für jedes $x \leq 1$, mit Gleichheit, genau dann wenn $x = 2/3$.

(g) Bestimmen Sie $f''(x)$ für $x < 1$, und zeigen Sie, dass $f''(x) < 0$ für jedes $x < 1$ ist.

Lösung:

(a) Da $x \mapsto x$, $x \mapsto (1-x)$ stetige Funktionen für $x \in \mathbb{R}$ sind und $y \mapsto \sqrt{y}$ stetig für $y \geq 0$ ist, folgt daraus, dass f stetig ist, weil eine Komposition dieser Funktionen ist.

(b) Da $x \to -\infty$ und $\sqrt{1-x} \to +\infty$ wenn $x \to -\infty$, es folgt daraus, dass $x\sqrt{1-x} \to -\infty$.

(c) Die Funktion $x \mapsto x$ ist glatt, und die Funktion $x \mapsto \sqrt{1-x}$ in $x \in]-\infty, 1[$ ist ebenfalls glatt. Produkte von glatten Funktionen sind glatt. Wir berechnen die Ableitung von f

$$f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}}.$$

(d) Da $\sqrt{1-x} \to 0$ und $\frac{x}{2\sqrt{1-x}} \to +\infty$ folgt daraus, dass $f'(x)$ gegen $+\infty$ wenn $x \to 1$ und $x < 1$ konvergiert.

(e) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \frac{x}{2\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow 2 - 2x = x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

(f) Der Wert $x = \frac{2}{3}$ ist ein einzigartiges globales Maximum, weil $f(1) = 0$ und $f(x) \to -\infty$ wenn $x \to -\infty$. Es folgt, dass $f(x) \leq f(2/3) = 2/3^{3/2}$ in $]-\infty, 0]$.

(g) Wit berechnen:

$$f''(x) = \left(\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}\right)' = \frac{-6\sqrt{1-x} + (2-3x)/\sqrt{1-x}}{4(1-x)} = \frac{3x-4}{4(1-x)^{3/2}}.$$

Da $3x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4/3$ und $(1-x)^{3/2} > 0 \Leftrightarrow x < 1$, es folgt daraus, dass $f''(x) < 0$ für jedes $x < 1$.

3.A3 [2 Punkte] Sei $f(x) = \cos(x)^4 - \sin(x)^3$ definiert für $x \in \mathbb{R}$.

(a) Drücken Sie $f(x)$ als Funktion von $\cos(ax)$, $\sin(bx)$, für geeignete Werte von a und b aus.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi f(x)dx.$$

3.A4 [2 Punkte]

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen a, b, c, sodass

$$\frac{2x-1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_2^5 \frac{2x-1}{x(x^2-1)}dx.$$

3.A5 [3 Punkte] Sei $f(x) = e^{x^2}$ definiert für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(a) Erklären Sie, warum f glatt ist.

(b) Bestimmen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(c) Beweisen Sie durch Induktion über n, dass es für alle $n \geq 0$ ein Polynom H_n gibt, so dass

$$f^{(n)}(x) = H_n(x) f(x)$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$.

3.A6 [5 Punkte] Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit der Eigenschaft, dass $f''(x) = f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(a) Sei g die Funktion, definiert durch $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $g'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Folgern Sie, dass es $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) - f'(x) = ce^{-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Sei h die Funktion, definiert durch $h(x) = e^{-x} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$h'(x) = -ce^{-2x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

(d) Schliessen Sie, dass es reelle Zahlen c_1 und c_2 gibt, sodass

$$f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

(e) Berechnen Sie f'' unter Verwendung dieses letzten Ausdrucks und leiten Sie daraus ab, dass $c_2 = 0$, und somit, dass $f(x) = c_1 e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.