Analysis I D-INFK FS24

Roland Prohaska

Hauptassistent: Riccardo Plati

Vorlesungshomepage:

metaphor.ethz.ch/x/2024/fs/401-0212-16L/

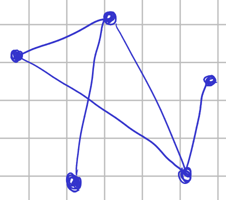
Empfehlung: Bearbeiten Sie die Übungsserien und besuchen Sie die Übungsstunden!

"Mathematics, you see, is not a spectator sport"
— George Pólya

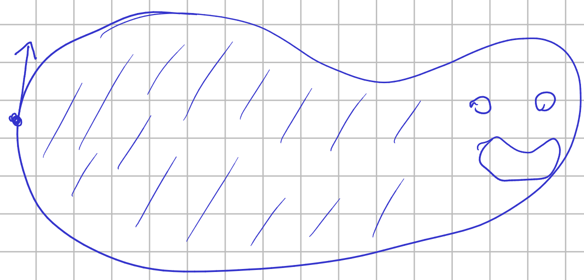
Was ist Analysis?

Analysis ist die Lehre und das Studium von:

→ kontinuierlichen Grössen, Veränderlichen, Prozessen

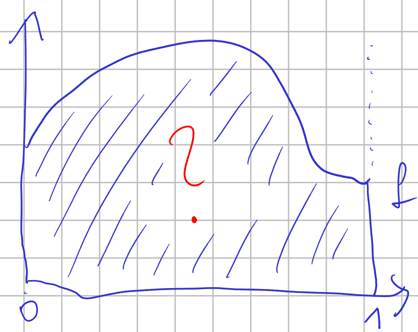


diskret

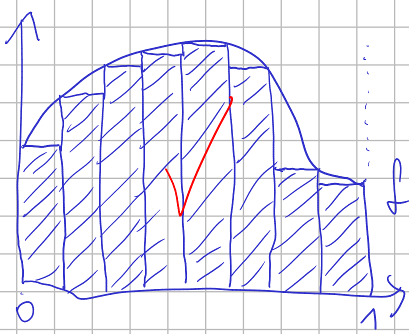


kontinuierlich

→ Approximationen und deren Güte



$\int_0^1 f(x)\,dx$



$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}$

Man kann schwierige kontinuierliche Probleme manchmal durch Approximation durch ein einfaches diskretes Problem approximativ lösen — z.B. numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen.

Manchmal sind aber auch diskrete Problemstellungen um einiges schwieriger als analoge kontinuierliche Probleme — z.B. Linear Programming vs. Integer Programming.

Approximationen können also in beide Richtungen ein wertvolles Hilfsmittel sein. — vorausgesetzt man weiss gut genug darüber Bescheid, wie gut die Approximation ist.

Warum Analysis für D-INFK?

Motivationen als Beispiel:

1) Asymptotische Laufzeiten:

a) Quicksort hat im durchschnittlichen Fall eine Laufzeit von $O(n \log n)$. Sie finden einen neuen Sortieralgorithmus mit Laufzeit $O\left(\frac{n\sqrt{n}}{\log n}\right)$. Ist das eine bessere oder schlechtere Asymptotik?

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

b) In einer langweiligen Vorlesung erhalten Sie Übungsblätter, für deren Lösung Sie $O(n!)$ Zeit benötigen. Anstatt die 100 Übungen zu bearbeiten, üben Sie lieber etwas Analysis, und fragen sich, wie gross $n!$ eigentlich ist.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \to \infty \qquad \text{(Stirling-Formel)}$$

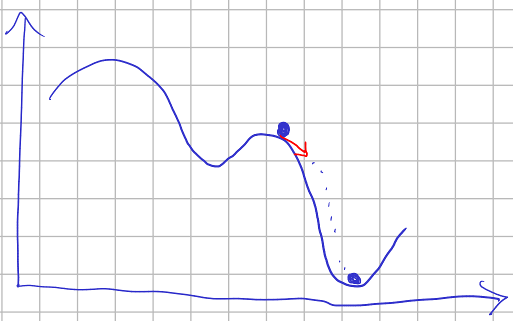
→ $100!$ ist eine Zahl mit ca.

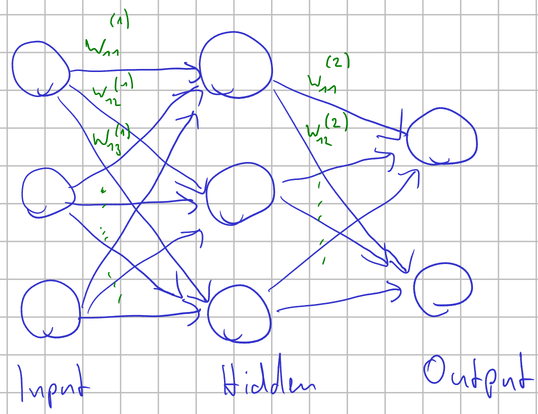
$$\left\lfloor \log_{10}\left(\sqrt{2\pi \cdot 100}\left(\frac{100}{e}\right)^{100}\right)\right\rfloor + 1 = 158 \text{ Stellen!}$$

(Tatsächlich: $100!$ hat 158 Stellen)

2) Machine Learning

Grundlegende Prinzipien des Machine Learning wie z.B. Gradient Descent und der Backpropagation-Algorithmus bei Neuronalen Netzen haben ihre mathematischen Grundlagen in der Differentialrechnung, einem Teil der Analysis.





Notation: $A \subset B$ ... A ist Teilmenge von B,

$A = B$ ist erlaubt

Notation in DM: $A \subseteq B$

Kapitel 1: Reelle Zahlen, Euklidische Räume, Komplexe Zahlen

1.1 Der Körper der reellen Zahlen

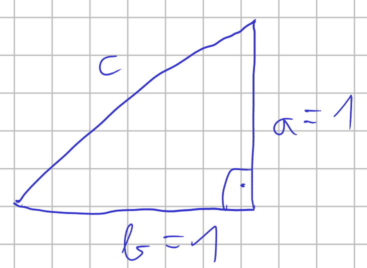
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

In $\mathbb{N}$ ist die Gleichung $x + 1 = 0$ nicht lösbar.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

In $\mathbb{Z}$ ist die Gleichung $2x + 1 = 0$ nicht lösbar

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$



$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$

Zur Lösung von $x^2 = 2$ werden die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eingeführt. Es gibt zwei Operationen:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

und eine Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$

Satz 1.1.2: $\mathbb{R}$ ist ein (kommutativer), angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist.

$\mathbb{R}$ enthält die beiden ausgezeichneten Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und erfüllt die folgenden Axiome:

Axiome der Addition

A1	Assoziativität	$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$:	$x+(y+z) = (x+y)+z$
A2	Neutrales Element	$\forall x \in \mathbb{R}$:	$x + 0 = x$
A3	Inverses Element	$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}$:	$x + y = 0$
A4	Kommutativität	$\forall x,z \in \mathbb{R}$:	$x + z = z + x$

Bemerkung 1.1.3: Das Element y in A3 wird mit $-x$ bezeichnet

Axiome der Multiplikation

M1	Assoziativität	$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$:	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
M2	Neutrales Element	$\forall x \in \mathbb{R}$:	$x \cdot 1 = x$
M3	Inverses Element	$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}$:	$x \cdot y = 1$
M4	Kommutativität	$\forall x,z \in \mathbb{R}$:	$x \cdot z = z \cdot x$

Bemerkung 1.1.4: Das Element y in M3 wird mit x^{-1} bezeichnet.

D	Distributivität	$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$:	$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

Ordnungsaxiome

O1	Reflexivität	$\forall x \in \mathbb{R}$:	$x \leq x$
O2	Transitivität	$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$:	$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
O3	Antisymmetrie	$\forall x,y \in \mathbb{R}$:	$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
O4	Total	$\forall x,y \in \mathbb{R}$:	$x \leq y \vee y \leq x$

Kompatibilität

K1	$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$:	$x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$
K2	$\forall x,y \in \mathbb{R}$:	$x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$

<u>Bemerkung 1.1.5:</u> Alles obige gilt auch schon für $\mathbb{Q}$!

Axiom V gilt für <u>alle</u> Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$

Ordnungsvollständigkeit

V Seien $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ mit

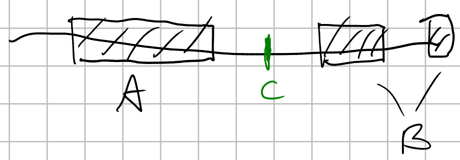
(i) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,

(ii) $\forall a \in A, \forall b \in B: \ a \leq b$

Dann gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \leq c \leq b$$

für alle $a \in A$, $b \in B$



(Skript:)

Bem: A1–A4 … $(\mathbb{R}, +)$ ist abelsche Gruppe

M1–M4 … $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe

A1–A4, M1–M4, D … $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper

O1–O4 … $\leq$ ist Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$

A1–A4, M1–M4, D, O1–O4, K1–K2

… $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist angeordneter Körper

A1–A4, M1–M4, D, O1–O4, K1–K2, V

… $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ordnungsvollst. angeordneter Körper

Notation $x > y \;:\Longleftrightarrow\; x \geq y \;\wedge\; x \neq y$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$: entweder $x > y$ oder $x = y$ oder $x < y$

Korollar 1.1.6:

(1) additive und multiplikative Inverse sind eindeutig

(2) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad 0 \cdot x = 0$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (-x) \cdot y = -(x \cdot y), \; (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

Insbesondere $(-1)^2 = 1$

vgl. DM

(4) $\forall y \in \mathbb{R}: \quad y \geq 0 \Longleftrightarrow -y \leq 0$

(5) $\forall y \in \mathbb{R}: \quad y^2 \geq 0$. Insbesondere $1 = 1^2 > 0$

(6) $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}: \quad x \leq y \wedge u \leq v \Longrightarrow x + u \leq y + v$

(7) $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}: \quad 0 \leq x \leq y \wedge 0 \leq u \leq v \Longrightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$

(8) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad 0 < x \leq y \Longleftrightarrow 0 < y^{-1} \leq x^{-1}$

Bew: (4) $y \geq 0 \overset{K1}{\Longrightarrow}$

$$\underbrace{y + (-y)}_{\overset{A3}{=}\, 0} \geq \underbrace{0 + (-y)}_{\overset{A2}{=}\, -y} \Bigg\} \; 0 \geq -y$$

Analog: $-y \leq 0 \Rightarrow y \geq 0$

(5) Fall 1: $y \geq 0$. Dann folgt aus K2: $y^2 \geq 0$

Fall 2: $y \leq 0$. Dann ist wegen (4) $-y \geq 0$.

Wende (4) auf $-y$ an
$y = -(-y) \leq 0$
$\Rightarrow -y \geq 0$

Aus K2 folgt $y^2 \overset{(3)}{=} (-y)^2 \geq 0$

Korollar 1.1.7 (Archimedisches Prinzip)

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$$y < n \cdot x$$

Bew: Idee: um zu zeigen, dass es für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $r < n$ gibt, betrachte

$A = \mathbb{N}$ und $B = \{ z \in \mathbb{R} \mid z \geq n \ \forall n \in \mathbb{N} \}$

Anwendung: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

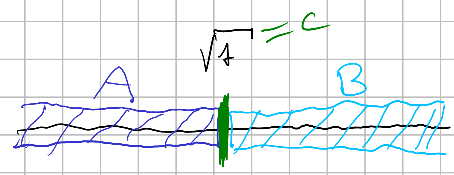
Satz 1.1.8 Für jedes $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, hat die Gleichung $x^2 = a$ eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Bem: Es gibt für $a \geq 0$ genau eine Lösung von $x^2 = a$ mit $x \geq 0$. Diese Lösung wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

Bew: Betrachte die folgenden Mengen:

$$A^{\mathbb{Q}} = \{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \mid y \geq 0 \,,\; y^2 \leq a \}$$

$$B^{\mathbb{Q}} = \{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \mid y > 0 \,,\; y^2 \geq a \}$$



Zwischen $A^{\mathbb{Q}}$ und $B^{\mathbb{Q}}$ gibt es kein $c \in \mathbb{Q}$ (ausser a ist das Quadrat einer rationalen Zahl.)

V(i) $A \neq \emptyset$, denn $0 \in A$.

Für B verwenden wir das Arch. Prinzip. Wir finden $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $n \geq a$.

Dann folgt $n \geq 1 > 0$, $n^2 \geq a \cdot 1 = a$

Kor. 1.1.6 (7)

$\Rightarrow n \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$

V(ii) $y \in A$, $z \in B$. Es gilt $z^2 \geq a \geq y^2 \Rightarrow z^2 - y^2 \geq 0$

$$0 \leq z^2 - y^2 = (z-y)\underbrace{(z+y)}_{>0} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{z+y}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq z - y \quad \Rightarrow \quad z \geq y$$

$$V \Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} \text{ mit } y \leq c \leq z \quad \forall\, y \in A,\, z \in B$$

$\underline{z.z.}$: $c^2 = 1$

1) $c^2 \geq 1$

Wenn nicht, dann wäre $1 - c^2 > 0$
$(n \geq 1)$

Arch. Prinzip $\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $2c+1 < n(1-c^2)$

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + 2 \cdot c \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\leq c^2 + 2c\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = c^2 + \underbrace{(2c+1) \cdot \frac{1}{n}}_{< 1-c^2}$$

$$< c^2 + 1 - c^2 = 1$$

$\Rightarrow$ $c + \frac{1}{n} \in A$. Aus Konstruktion von c folgt

$c + \frac{1}{n} \leq c$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{n} \leq 0$ $\lightning$

$\Rightarrow$ 1) gilt.

2) analog: $c^2 \leq 1$

3) O3 $\Rightarrow$ $c^2 = 1$ $\square$