Clicker-Frage

Antwortmöglichkeit 2:

$1 \in \mathbb{R}$, $A^{\mathbb{Q}} := \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 \leq 1 \}$, $B^{\mathbb{Q}} := \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 \geq 1 \}$

Gibt es höchstens ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A^{\mathbb{Q}}, b \in B^{\mathbb{Q}}$?

$1 \geq 0$: Dann sind $A^{\mathbb{Q}}$ und $B^{\mathbb{Q}}$ nichtleer

Und zwischen $A^{\mathbb{Q}}$ und $B^{\mathbb{Q}}$ gibt es aufgrund der Argumentation vom letzten Mal und der Dichtheit der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ höchstens ein $c \in \mathbb{R}$

Schritt 1: Alle $c \in \mathbb{R}$ zwischen $A^{\mathbb{Q}}$ und $B^{\mathbb{Q}}$ erfüllen $c^2 = 1$.
Denn falls $c^2 < 1$, dann finden wir wie in der 1. Vorlesung $n \in \mathbb{N}$ mit $(c + \frac{1}{n})^2 \leq 1$.
Dichtheit von $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $\exists r \in \mathbb{Q}$ mit $c < r < c + \frac{1}{n}$. Kor. 1.1.6(2) $\Rightarrow$ $r^2 \leq (c + \frac{1}{n})^2 \leq 1$.
$\Rightarrow r \in A^{\mathbb{Q}}$. Widerspruch, da $c < r$. Also gilt $c^2 \geq 1$. Analog: $c^2 \leq 1$.

Schritt 2: Eindeutigkeit von nicht negativen Wurzeln
$\rightarrow$ Aufgabe in Serie 1

$1 < 0$: Dann ist $A^{\mathbb{Q}} = \emptyset$ und $B^{\mathbb{Q}} = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \}$

Dann erfüllen alle $c \in \mathbb{Q}$ mit $c \leq 0$ die Eigenschaft in Antwortmöglk. 2.

"$\forall a \in A^{\mathbb{Q}} = \emptyset \ldots$" ... und das ist immer wahr

Das war nicht der interessante Fall

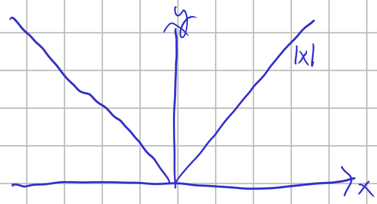
Def. 1.1.9: Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $\max\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x \leq y \end{cases}$

(ii) $\min\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{falls } x \geq y \end{cases}$

(iii) Der Absolutbetrag von x ist $|x| := \max\{x, -x\}$

Satz 1.1.10



(i) $\forall x \in \mathbb{R}: \ |x| \geq 0$

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ |x+y| \leq |x| + |y|$ ... Dreiecksungleichung

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ |x+y| \geq \big||x| - |y|\big|$ ... umgekehrte Dreiecks= ungleichung

Bew: Fallunterscheidung nach den Vorzeichen.

Notationen

- „Plus / minus Unendlich": ∞, $-\infty$
  $+\infty$

  Konvention: $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$

  Bem: ∞ kann kein Element von $\mathbb{R}$ sein. (Genauso $-\infty$)

- Intervalle:

  (1) für $a \leq b$ in $\mathbb{R}$:

  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ... abgeschlossen, kompakt

  $\left.\begin{array}{l} [a, b[\ = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ ]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{array}\right\}$ halboffen

  $]a, b[\ = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ... offen

(2) für $a \in \mathbb{R}$:

$$[a, \infty[\; = [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$
$$]a, \infty[\; = (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$$
$$]-\infty, a[\; = (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$$

abgeschlossen, nicht kompakt

offen

(3) $]-\infty, \infty[\; = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

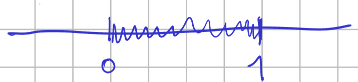
Def 1.1.12: Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

(i) $c \in \mathbb{R}$ ist <u>obere Schranke</u> von A falls $a \leq c$ für alle $a \in A$.
A heisst <u>nach oben beschränkt</u>, wenn es eine obere Schranke von A gibt

(ii) $c \in \mathbb{R}$ ist <u>untere Schranke</u> von A falls $a \geq c$ für alle $a \in A$.
A heisst <u>nach unten beschränkt</u>, wenn es eine untere Schranke von A gibt

(iii) $m \in \mathbb{R}$ heisst <u>Maximum</u> von A falls $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.

$A = [0, 1] \rightarrow \max A = 1$



$\min A = 0$

(iv) $m \in \mathbb{R}$ heisst <u>Minimum</u> von A falls $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

(v) A heisst <u>beschränkt</u> falls A nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bem: Wenn ein Maximum von A existiert, dann ist es eindeutig.
Wenn ein Minimum von A existiert, dann ist es eindeutig.

Notation $\max A$ bzw. $\min A$ (falls es jeweils existiert!)

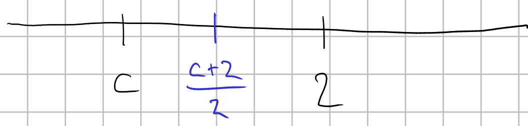
$A_1 = [0,1) \implies A_1$ hat kein Maximum, da $1 \notin A_1$.

$A_2 = [0,1) \cap \mathbb{Z} = \{0\} \implies A_2$ hat ein Maximum.

Beispiele 1.1.13 + 1.1.14: $A = (-\infty, 2)$, $B = (-\infty, 2]$

Jede Zahl $c \geq 2$ ist obere Schranke von A als auch von B.

Wenn $c < 2$, dann ist



$\frac{c+2}{2} < 2$ aber auch $c < \frac{c+2}{2}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\frac{c+2}{2} \in A$ und $\in B$ c kann keine obere Schranke von A oder B sein

$\hookrightarrow$ Die Menge der oberen Schranken von A als auch B ist $M = [2, \infty)$, welche ein Minimum hat

Satz 1.1.15 Sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) Sei A nach oben beschränkt. Dann gibt es eine kleinste obere Schranke von A, genannt das Supremum von A.

Notation: $\sup A$

(ii) Sei A nach unten beschränkt. Dann gibt es eine grösste untere Schranke von A, genannt das Infimum von A

Notation: $\inf A$

Bew: (i) Sei M die Menge der oberen Schranken von A.

$A \neq \emptyset$ per Annahme, und A nach oben beschränkt impliziert $M \neq \emptyset$

dh $V(i)$ ist erfüllt.

$V(ii)$ ist auch erfüllt, da M genau alle oberen Schranken von A enthält.

$\Rightarrow c$ ist die kleinste obere Schranke von A.

$V \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq c \leq m \quad \forall a \in A,\ m \in M$.

$\Rightarrow c$ ist obere Schranke von $A \Rightarrow c \in M$

$\Rightarrow c$ ist das Supremum von A.

(ii) analog oder Übung $\square$

Konvention:

- A nicht nach oben beschränkt $\longrightarrow \sup A = \infty$
- A nicht nach unten beschränkt $\longrightarrow \inf A = -\infty$
- $\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = \infty$

denn für $\emptyset$ ist jedes $c \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke!

Beispiel 1.1.12:

(i) $A = [1,2)$. $\quad \inf A = \underset{\min A}{1}, \quad \sup A = 2$, max A existiert nicht.

Bem: Wenn $\max A$ existiert, dann ist $\max A = \sup A$

Analog: $\min A = \inf A$ falls $\min A$ existiert

(ii) $A = \left\{1,\ 1+\frac{1}{2},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \dots\right\}$

$= \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$

$\min A = \inf A = 1$

max A existiert nicht. A ist nicht nach oben beschränkt

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}+\dots \Rightarrow \sup A = \infty$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Kardinalität (Wiederholung aus DM)

Def 1.1.18:

(i) Zwei Mengen X, Y heissen <u>gleichmächtig</u>, wenn es eine Bijektion $f: X \to Y$ gibt. ← bijektiv $\iff$ injektiv + surjektiv

(ii) Eine Menge X heisst <u>endlich</u>, wenn entweder $X = \emptyset$ oder ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass X und $\{1, 2, \ldots, n\}$ gleichmächtig sind. Notation: $|X| = \operatorname{card} X = n$

(iii) Eine Menge X heisst <u>abzählbar</u>, wenn X entweder endlich ist oder gleichmächtig wie $\mathbb{N}$.

(iv) Eine Menge X heisst <u>abzählbar unendlich</u>, wenn X gleichmächtig ist wie $\mathbb{N}$.

(v) Eine Menge X heisst <u>überabzählbar</u>, wenn X nicht abzählbar ist.

$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

Beispiel 1.1.19 (i) $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar

(ii) Jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist entweder endlich oder abzählbar unendlich

(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto 2^a 3^b$ ist injektiv. Also ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gleichmächtig wie eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$.

Aus (ii) folgt, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich ist.

Satz 1.1.20 (Cantor) $\mathbb{R}$ ist überabzählbar

Bew: in Kapitel 2.

1.2 Der Euklidische Raum

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ ... Ebene

$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ 3D-Raum

Sei $n \geq 1$ und

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

das n-fache kartesische Produkt von $\mathbb{R}$.

Für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$ ... komponentenweise Addition

α wird auch Skalar genannt

$$\alpha \cdot x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$ ... Skalarmultiplikation

Lineare Algebra $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ ist mit den Operationen

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (x,y) \mapsto x+y \qquad , \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad (\alpha, x) \mapsto \alpha \cdot x$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Skalarprodukt: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

Eigenschaften:

(1) Symmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(2) Bilinearität: $\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$$

Linearität von $x \mapsto \langle x, y \rangle$

$$\langle y, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle = \alpha_1 \langle y, x_1 \rangle + \alpha_2 \langle y, x_2 \rangle$$

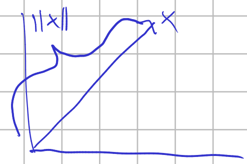
(3) positiv definit: $\forall x \in \mathbb{R}^n: \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

und $\langle x, x \rangle = 0$ gilt nur für $x = 0 = (0, 0, \dots, 0)$

Def:
- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heissen orthogonal wenn $\langle x, y \rangle = 0$

- Die Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$



Satz 1.2.1: (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

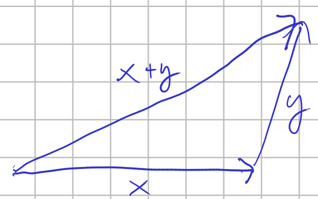
Gleichheit gilt genau dann wenn x, y linear abhängig sind.

Satz 1.2.2:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}^n: \quad \|x\| \geq 0$, mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}: \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

(3) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ... Dreiecksungleichung



Bew: (3) folgt aus Cauchy-Schwarz, siehe Skript.