Beispiel: $B = \{0\} \Rightarrow \beta = \inf B = 0$

aber $B \cap \underset{\substack{\| \\ (0,1)}}{(\beta, \beta+1)} = \emptyset$

Charakterisierung von sup und inf:

$R = \sup B \iff \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in B:\ x \leq R \\ \bullet\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in B:\ x > R - \varepsilon \end{array}}$

$r = \inf B \iff \boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \forall x \in B:\ x \geq r \\ \bullet\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in B:\ x < r + \varepsilon \end{array}}$

Kreuzprodukt

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiert man

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

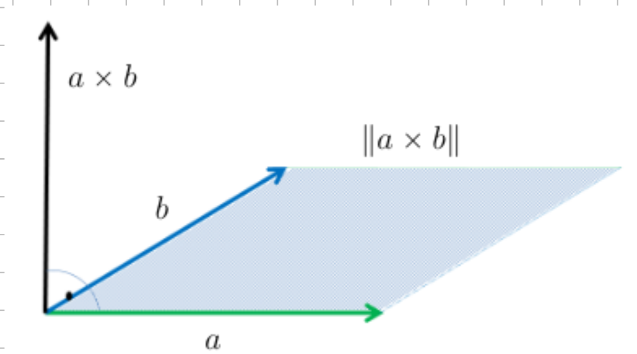
- $a \times b$ ist der eindeutige Vektor in $\mathbb{R}^3$, so dass $\forall c \in \mathbb{R}^3$ gilt $\langle a \times b, c \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

  "Merkregel": $a \times b \text{ "=" } \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} e_3$

- $a \times b$ steht orthogonal auf a und auf b

- $\|a \times b\|$ ist der Flächeninhalt des von a und b aufgespannten Parallelogramms



Eigenschaften: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^3$

(1) Distributivität $\quad (a+b) \times c = a \times c + b \times c$

(2) Antisymmetrie $\quad a \times b = - b \times a$

(3) Jacobi-Identität

$$a \times (b \times c) + c \times (a \times b) + b \times (c \times a) = 0$$

1.3 Komplexe Zahlen

$x^2+1=0$ war in $\mathbb{R}$ noch immer nicht lösbar.

Auf $\mathbb{R}^2$ können wir die folgende Multiplikation definieren:

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$$

Woher kommt diese Formel?

→ Schreibe $\underline{1}=(1,0)$, $\underline{i}=(0,1)$, dann ist

$$(x,y) = x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1) = x\cdot\underline{1}+y\cdot\underline{i}$$

Wir wollen, dass $\underline{1}$ multiplikative Einheit ist und i die Gleichung $\underline{i}^2=-\underline{1}$ löst. Ausserdem soll die Multiplikation eine bilineare Abbildung $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ sein (in anderen Worten, ein "Distributivgesetz" erfüllt)

Dann folgt: $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1\cdot\underline{1}+y_1\cdot\underline{i})\cdot(x_2\cdot\underline{1}+y_2\cdot\underline{i})$

$$= x_1x_2\cdot\underbrace{\underline{1}\cdot\underline{1}}_{\underline{1}} + x_1y_2\cdot\underbrace{\underline{1}\cdot\underline{i}}_{\underline{i}} + y_1x_2\cdot\underbrace{\underline{i}\cdot\underline{1}}_{\underline{i}} + y_1y_2\cdot\underbrace{\underline{i}\cdot\underline{i}}_{-\underline{1}}$$

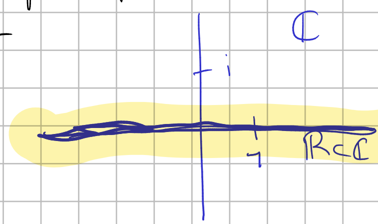
$$= (x_1x_2-y_1y_2)\cdot\underline{1} + (x_1y_2+x_2y_1)\cdot\underline{i}$$

Es gilt:

- Kommutativität: $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_2,y_2)\cdot(x_1,y_1)$
- Nullelement: $(0,0)\cdot(x,y)=(0,0)$
- Einselement: $(1,0)\cdot(x,y)=(x,y)$
- Inverse: $(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$ falls $(x,y)\neq(0,0)$

Satz 1.3.1 $\mathbb{R}^2$ versehen mit üblicher Vektoraddition $+$ und obiger Multiplikation $\cdot$ ist ein (kommutativer) Körper mit Nullelement $(0,0)$ und Einselement $(1,0)$.

- $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ wird der Körper der komplexen Zahlen genannt und mit $\mathbb{C}$ bezeichnet.
- $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x,0) = x \cdot (1,0) = x \cdot \underline{1}$ ist eine Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$. Diese Abbildung respektiert alle Körperoperationen und identifiziert $\mathbb{R}$ mit der x-Achse in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$



kartesische Form von $z = x + iy$

Notation: für $x, y \in \mathbb{R}$: $x + iy := x \cdot \underline{1} + y \cdot \underline{i} = (x,y)$

$$x = x \cdot \underline{1} = (x,0)$$

$$(0,1)\cdot(y,0) = iy = y \cdot \underline{i} = (0,y)$$

$$1 = \underline{1} = (1,0), \quad i = \underline{i} = (0,1)$$

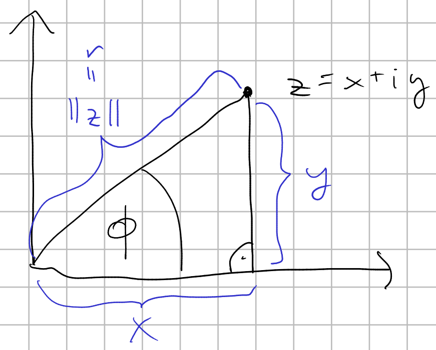
Def:

- Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Re}(z) := x$ der Realteil und $\mathrm{Im}(z) := y$ der Imaginärteil von z
- $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto \overline{z} := x - iy$ ist die komplexe Konjugation.

Satz 1.3.2: (i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

(ii) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = \|z\|^2$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$

Polarform:



(Absolut-) Betrag von z

Argument von z, eindeutig bis auf Vielfache von 2π

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

Polarform von z

$$\Rightarrow z = x + iy = r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$z_1 = r_1 (\cos \phi_1 + i \sin \phi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

$$\rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

Merkregel: **Beträge multiplizieren sich, Argumente addieren sich**

Für $z = r(\cos\phi + i \sin\phi)$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$z^n = r^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$$

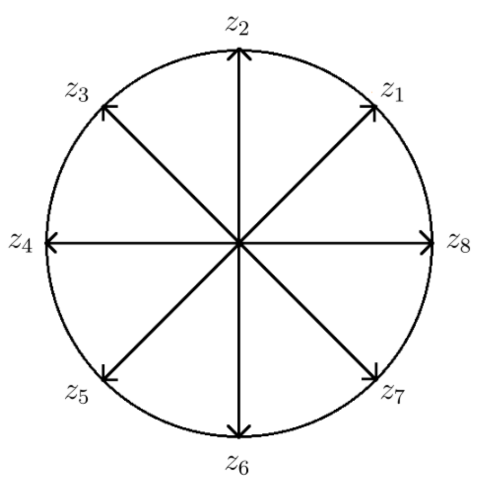
<u>Korollar 1.3.3</u> Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dann hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich $z_1, \dots, z_n$ wobei

$$z_j = \cos \frac{2\pi j}{n} + i \sin \frac{2\pi j}{n} \qquad (1 \leq j \leq n)$$

n-te Einheitswurzeln

Kreisteilungsgleichung

$n = 8$:



$z^8 = 1$

Satz 1.3.4 (Fundamentalsatz der Algebra). Sei $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ und $P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_j \in \mathbb{C}$.

Dann gibt es $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$P(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n). \qquad (*)$$

Die Menge $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ist genau die Menge der Nullstellen von P und damit eindeutig bestimmt. Auch die Vielfachheiten der Nullstellen, also die Häufigkeiten der Faktoren $(z - z_j)$ in $(*)$ sind eindeutig bestimmt.

Kapitel 2: Folgen und Reihen

2.1 Grenzwert einer Folge

$\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\}$

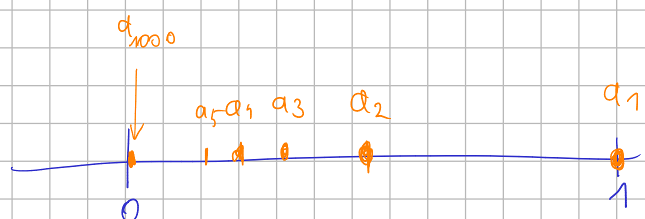
Def 2.1.1 Eine Folge (reeller Zahlen) is eine Abbildung

$$a: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}.$$

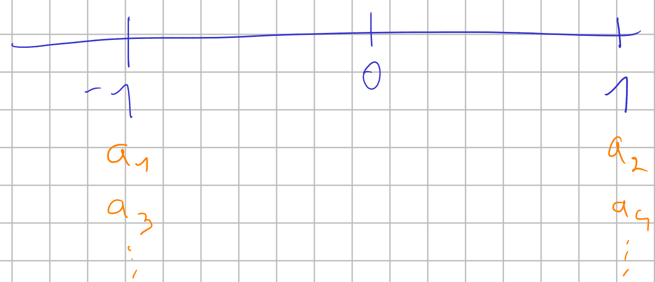
Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen eine Folge mit $(a_n)_{n\geq 1}$.

Beispiel 2.1.2

(1) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$



(2) $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$



Lemma 2.1.3: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Dann gibt es höchstens ein $l \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$(*) \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \text{ ist die Menge } \{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon)\} \\ \text{endlich} \end{cases}$$

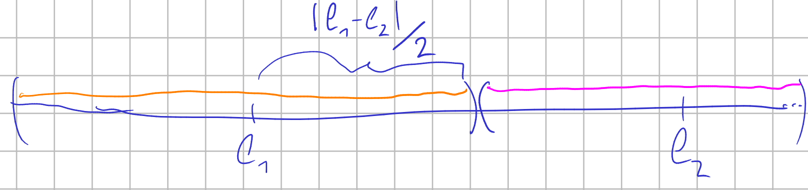
ε-Umgebung von l

Bew: Angenommen, dies würde für $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ gelten, $l_1 \neq l_2$.

Setze $\varepsilon := \frac{|l_1 - l_2|}{2}$. Dann ist $\varepsilon > 0$.

Eigenschaft (*) für l_1 $\Rightarrow$ nur endlich viele a_n ausserhalb von

$\Rightarrow$ unendlich viele a_n sind innerhalb von



Eigenschaft (*) für ℓ_2 $\Rightarrow$ nur endlich viele a_n ausserhalb von

Aber $\subset$ "ausserhalb von " $\Rightarrow$ Widerspruch

Angenommen, $x \in (\ell_1-\varepsilon, \ell_1+\varepsilon)$. Dann gilt: $|x-\ell_2| = |\ell_1-\ell_2+(x-\ell_1)| \geq \underbrace{|\ell_1-\ell_2|}_{=2\varepsilon} \underbrace{-|x-\ell_1|}_{>-\varepsilon} > \varepsilon$

$\Rightarrow x \notin (\ell_2-\varepsilon, \ell_2+\varepsilon)$ $\square$

Def. 2.1.4 Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst <u>konvergent</u> falls es ein $\ell \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)\} \text{ endlich ist}$$

Lemma 2.1.3 $\Rightarrow$ eine solche Zahl $\ell \in \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt, falls sie existiert. Sie wird für eine konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

bezeichnet und wird <u>Grenzwert</u> oder <u>Limes</u> von $(a_n)_{n\geq 1}$ genannt. Man sagt auch, "$(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $\lim_{n\to\infty} a_n$"

Bemerkung 2.1.5: Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt

Es gibt nur endlich viele n mit $a_n \notin \left(\lim_{n\to\infty} a_n - 1, \lim_{n\to\infty} a_n + 1\right)$

Nenne diese Indizes $i_1, \dots, i_N$. Dann gilt $|a_n| \leq \max\left\{\left|\lim_{n\to\infty} a_n\right| + 1, |a_{i_1}|, |a_{i_2}|, \dots, |a_{i_N}|\right\}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Die folgende Umformulierung der Konvergenz ist nützlich um die Notation in Beweisen zu vereinfachen.

Lemma 2.1.6: Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

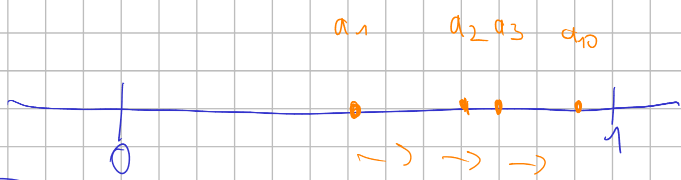
(1) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$

Bew: siehe Skript.

Beispiel 2.1.7: Sei $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \geq 1$.

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$ $\quad a_{10} = \frac{10}{11}$



Vermutung: $\overbrace{a_n \longrightarrow 1 \quad \text{für } n \to \infty}^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1}$

Bew: Es gilt $\quad |a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$

Arch. Prinzip $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$. $\Rightarrow \forall n \geq N: |a_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$.