Wiederholung: Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen ℓ wenn:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists N\in\mathbb{N} : \forall_{n\geq N} : |a_n-\ell|<\varepsilon$$

Einfaches Bsp: $a_n=\frac{n}{n+1}$, wir haben gesehen: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Def: Eine Folge heisst divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

Def (Konvergenz gegen $\pm\infty$) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ...

- konvergiert gegen ∞, wenn es für alle $A\in\mathbb{R}$ ein $N\in\mathbb{N}$ gibt mit $a_n\geq A$ für alle $n\geq N$.
- konvergiert gegen $-\infty$, wenn es für alle $A\in\mathbb{R}$ ein $N\in\mathbb{N}$ gibt mit $a_n\leq A$ für alle $n\geq N$.

Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$\rightarrow$ "bestimmt divergent" oder "uneigentlich konvergent"

Beispiel: $a_n=2^n$, $n\geq 1$.

Dann gilt $a_n=2^n \overset{(*)}{\geq} n+1$

Ist nun $A\in\mathbb{R}$ vorgegeben, dann können wir $N\in\mathbb{N}$ wählen mit $N\geq A$ und dann folgt für $n\geq N$

$$a_n=2^n\overset{(*)}{\geq} n+1 \geq N+1\geq A$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen ∞.

(*) Warum? Induktion:

$n=0$: ✓

Wenn $2^n\geq n+1$ dann ist

$$2^{n+1}=2\cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2 \geq n+2 = (n+1)+1$$

Satz 2.1.8: Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(1) Dann ist $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

(2) Dann ist $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3) Wenn zusätzlich $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$, dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

(4) Falls es $K \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq K$, dann folgt $a \leq b$

Bem:
- Man kann sich (1)-(3) so vorstellen, dass man den Limes in die Operationen "hineinziehen" kann. Also z.B.:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \overbrace{\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)}^{a} + \overbrace{\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)}^{b}$$

Aber Achtung: vorher muss sichergestellt sein, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ existieren!

- In (3) reicht es zu fordern, dass $b \neq 0$ und $\exists K \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq K$. Dann sind vielleicht $\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_{K-1}}{b_{K-1}}$ nicht definiert, aber wir können einfach $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq K}$ betrachten.

Bew: (1) Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

Sei $N_2 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N_2 : |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

Dann gilt für alle $n \geq N := \max(N_1, N_2)$:

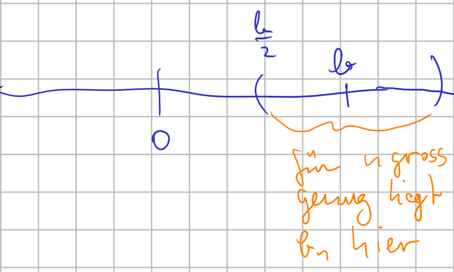
$$|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

(3) (mit $a_n = 1$ für alle $n \geq 1$) z.z. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N_1 : |b_n| \geq \frac{|b|}{2}$

Sei $N_2 \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N_2 : |b_n - b| \leq \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$



Dann gilt für $n \geq N := \max(N_1, N_2)$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{\overbrace{|b_n - b|}^{\leq \frac{|b|^2}{2}\varepsilon}}{\underbrace{|b_n|}_{\geq \frac{|b|}{2}} \cdot |b|} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

$\square$

Beispiel 2.1.9 Sei $b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^b = 1$.

$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ (für $n \to \infty$). Satz oben (1) $\Rightarrow$ $1 + \frac{1}{n} \rightsquigarrow 1$ $(n \to \infty)$ $\overset{\text{Satz oben (2) / (3)}}{\Longrightarrow}$ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^b \longrightarrow 1$ $(n \to \infty)$

2.2. Der Satz von Weierstrass und Anwendungen

Def 2.2.1: (i) $(a_n)_{n \geq 1}$ ist (strikt) monoton wachsend falls $a_n \overset{<}{\leq} a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$

(ii) $(a_n)_{n \geq 1}$ ist (strikt) monoton fallend falls $a_n \overset{>}{\geq} a_{n+1}$ für alle $n \geq 1$

Satz 2.2.2 (Weierstrass):

- Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \geq 1\}$
- Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \geq 1\}$

Bew: (erste Aussage) Sei $s = \sup\{a_n \mid n \geq 1\}$, $\varepsilon > 0$.

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > s - \varepsilon$. Dann gilt $\forall n \geq N$

$$s - \varepsilon < a_N \underset{\uparrow}{\leq} a_n \leq s \quad \Rightarrow \quad |a_n - s| < \varepsilon \quad \forall n \geq N. \qquad \square$$

da $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend ist.

Bem: • wenn $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton wachsend und nach oben unbeschränkt ist, dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$

• wenn $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und nach unten unbeschränkt ist, dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$

Beispiel 2.2.3: Sei $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq q < 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{n^a q^n}_{= x_n} = 0$.

$$(*)\ \boxed{x_{n+1}} = (n+1)^a \cdot q^{n+1} = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^a \cdot q \underbrace{n^a \cdot q^n}_{x_n} = \underbrace{\underbrace{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^a}_{\xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{Bsp. 2.1.9}} 1} \cdot q}_{\xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{Satz 2.1.8}} q} \cdot x_n$$

$\Rightarrow$ da $q < 1$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a q = q$, gibt es $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N$

$$(**) \quad \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^a q < 1$$

D.h. für $n \geq N$ gilt $x_{n+1} \overset{(*)+(**)}{\leq} x_n$. monoton fallend

Ausserdem: $x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ nach unten beschr.

Weierstrass "ab N" $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ existiert in $\mathbb{R}$. Sei $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt:

$$\ell = \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^a q \cdot x_n\right) \overset{\text{Satz 2.1.8}}{=} 1 \cdot q \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} x_n}_{= \ell} = q \cdot \ell$$

Index-Shift.

$$\ell = q \cdot \ell \Leftrightarrow \underbrace{(1-q)}_{\neq 0} \cdot \ell = 0 \Rightarrow \ell = 0$$

Beispiel 2.2.5: Es gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

<u>Beweisidee</u>: • Monotonie von Wurzeln: (vgl. Serie 1)

$$0 \le a < b \iff 0 \le \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

• Beispiel 2.2.3 mit $q = \frac{1}{1+\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$

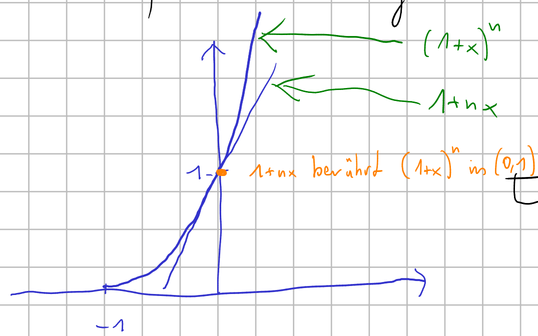
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$$

<u>Beispiel 2.2.6</u>: Die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \ge 1$, konvergiert.

Der Grenzwert ist $$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718\ldots$$

<u>Lemma 2.2.7</u> (Bernoulli Ungleichung) Für $n \in \mathbb{N}$, $x \ge -1$ gilt

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$



<u>Bew</u>: Induktion; siehe Skript. $\square$

Zum Beweis der Konvergenz in Beispiel 2.2.6 betrachten wir die Hilfsfolge $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ und behaupten, dass $(y_n)_{n\ge1}$ monoton fallend ist. In der Tat gilt für $n \ge 2$:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \underbrace{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n}_{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}_{\overset{\text{Bernoulli}}{\ge} 1+\frac{n}{n^2-1}}} \frac{n}{n+1}$$

$$\ge \Big(1+\underbrace{\frac{n}{n^2-1}}_{>\frac{1}{n}}\Big) \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow (y_n)_{n\ge1} \text{ mon. fallend.}$$

und (y_n) nach unten beschr., da z.B. alle y_n positiv sind☺

Weierstrass $\Rightarrow$ $(y_n)_{n \geq 1}$ konvergiert.

$$x_n = \underbrace{y_n}_{\text{konvergiert}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\text{konvergiert.}} \overset{\text{Satz 2.1.8}}{\Longrightarrow} (x_n)_{n\geq 1} \text{ konvergiert und } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Um etwas über den Grenzwert zu erfahren, könnte man auch zeigen, dass $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend ist. Daraus folgt: $e \geq x_1 = 2$. oder: $e \geq x_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$

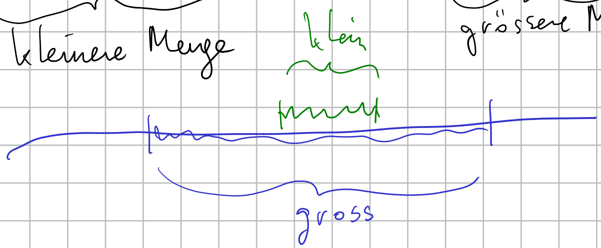
2.3 Limes superior und Limes inferior

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Wir definieren für $n \geq 1$:

$$b_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}, \qquad c_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$$

b_n: monoton wachsend! $\qquad$ c_n: monoton fallend.

$$b_{n+1} = \inf \underbrace{\{a_k \mid k \geq n+1\}}_{\text{kleinere Menge}} \geq \inf \underbrace{\{a_k \mid k \geq n\}}_{\text{grössere Menge}} = b_n$$



Weierstrass $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} b_n =: \liminf_{n\to\infty} a_n$

$\lim_{n\to\infty} c_n =: \limsup_{n\to\infty} a_n$

existieren!