Sandwichlemma:

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ reelle Folgen, so dass $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergieren mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Wenn es ein $N\in\mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n\geq N$, dann konvergiert auch $(c_n)_{n\geq 1}$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Wiederholung:

$(a_n)_{n\geq 1}$ reelle Folge

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\inf\{a_k \mid k\geq n\}}^{b_n}$$

existieren aufgrund von Monotonie

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sup\{a_k \mid k\geq n\}}_{c_n}$$

immer: entweder in $\mathbb{R}$ oder sie sind $\pm\infty$

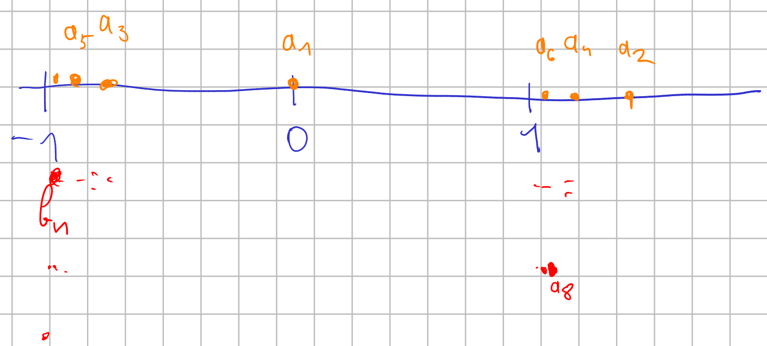
Beispiel 2.3.1

$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n\geq 1$

$b_n = -1$

$c_n = 1 + \frac{1}{n_g}$ wobei

n_g die kleinste gerade Zahl $\geq n$ ist.



$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -1$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$$

Eigenschaften:

- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n < \infty \iff (a_n)_{n\geq 1}$ ist nach oben beschränkt

  $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n > -\infty \iff (a_n)_{n\geq 1}$ ist nach unten beschränkt
- $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen ∞

  $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \iff (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $-\infty$
- Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$: $\quad a_n \in \left(\liminf\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon, \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon\right)$

Bew. der letzten Eigenschaft: $\quad \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Wähle N so, dass $\quad b_n > \liminf\limits_{n\to\infty} a_n - \varepsilon \quad$ für alle $n \geq N$

und so, dass $\quad c_n < \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \quad$ für alle $n \geq N$

Aus der Def. ergibt sich: $\forall n \geq N$:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < b_n \leq a_n \leq c_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon \qquad \square$$

2.4 Das Cauchy Kriterium

Ziel: Kriterium für Konvergenz einer Folge, ohne den Grenzwert im Vorhinein zu kennen

Lemma 2.4.1 $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert genau dann, falls $(a_n)_{n\geq 1}$ beschränkt ist und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Bew: „$\Rightarrow$" Übung.

„$\Leftarrow$" Angenommen $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschr. und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n =: \ell$

Aufgrund der letzten Eigenschaft oben gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N: a_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Das bedeutet genau, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ gegen ℓ konvergiert. $\square$

Satz 2.4.2 (Cauchy Kriterium) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann konvergent, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

$(a_n)_{n\geq 1}$ ist Cauchy-Folge

Bew: „$\Rightarrow$" Wenn $a_n \to A$ $(n \to \infty)$, dann gibt es für $\varepsilon > 0$ ein N mit $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N$

$$\Rightarrow |a_m - a_n| = |a_m - A - (a_n - A)|$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_m - A| + |a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $m, n \geq N$.

"$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall m, n \geq N$.

$\underline{m = N}$ $\Rightarrow$ $a_N - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_n \leq a_N + \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq N$

$\Rightarrow$ $a_N - \frac{\varepsilon}{2} \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq a_N + \frac{\varepsilon}{2}$.

$\Downarrow$ das zeigt auch (a_n) beschränkt ist

$\Rightarrow$ $\left|\limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n\right| \leq \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$!

$\Rightarrow$ $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ Lemma oben $\Rightarrow$ (a_n) konvergent $\square$

2.5 Der Satz von Bolzano-Weierstrass

Ziel: Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

Def. 2.5.1: Ein abgeschlossenes Intervall ist eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ der Form:

(1) $[a, b]$, $a \leq b$, $a, b \in \mathbb{R}$

(2) $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$

(3) $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$

(4) $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Länge von I:

$\mathcal{L}(I) = \mathcal{L}([a, b]) = b - a$

(2)–(4): $\mathcal{L}(I) = \infty$

Bemerkung 2.5.2: Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n \in I$ $\forall n \geq 1$ gilt, dass auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ in I ist.

Def: Eine monoton fallende Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist eine Folge $(X_n)_{n\geq 1}$, $X_n \subset \mathbb{R}$, mit $X_{n+1} \subset X_n$ für alle $n \geq 1$.

Beispiel 2.5.4

(1) Sei $X_n = (0, \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$. ← beschränkt aber nicht abgeschlossen

$(0 \quad 1]$
$(0 \quad \frac{1}{2}]$
$(0 \quad \frac{1}{3}]$
$\vdots$

Dann ist $\bigcap_{n \geq 1} X_n = \emptyset$

← abgeschlossen, aber unbeschränkt

(2) Sei $X_n = [n, \infty)$, $n \geq 1$

Dann ist $\bigcap_{n \geq 1} X_n = \emptyset$

alle nicht leer!

Satz 2.5.5 (Cauchy-Cantor): Sei $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$ eine monoton fallende Folge abgeschlossener Intervalle mit $\mathcal{L}(I_1) < \infty$.

Dann gilt: $\bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$.

Wenn $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}(I_n) = 0$, dann enthält $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ genau einen Punkt.

"Intervallschachtelung"

Bew: Schreibe $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$\forall m, n \geq 1: \quad a_n \leq b_m$

[Denn wenn nicht, also wenn $a_n > b_m$, dann wäre: $\underbrace{[\quad]}_{I_m} \quad \underbrace{[\quad]}_{I_n}$, $b_m < a_n$

$\Rightarrow I_n \cap I_m = \emptyset$ ↯]

Vollst. axiom V

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \quad a_n \leq c \leq b_m \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

Insbesondere: $a_n \leq c \leq b_n \implies c \in I_n$

Das gilt $\forall n \in \mathbb{N}^* \implies c \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$

Angenommen $\exists\, c_1, c_2 \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$ mit $c_1 \neq c_2$. Dann ist $|c_1 - c_2| > 0$. Also ist $d(I_n) \geq |c_1 - c_2| > 0!$ $\forall n \geq 1$. ↯ zu $\lim_{n\to\infty} d(I_n) = 0$

□

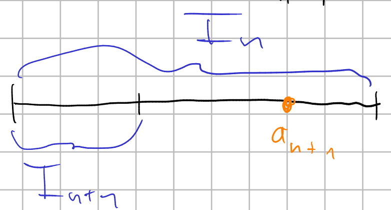
Satz 2.5.6: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

Beweisidee: angenommen wir hätten eine "Aufzählung" der reellen Zahlen, d.h. eine surjektive Abbildung $\left.\mathbb{N}^* \to [0,1]\right\}$ eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$!

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung mit $I_0 = [0,1]$ und I_n jeweils so, dass $a_n \notin I_n$.

Dann wäre $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ nicht leer (Cauchy-Cantor) und jedes $c \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$ kann nicht in $(a_n)_{n\geq 1}$ sein.

Konstruktionsidee:



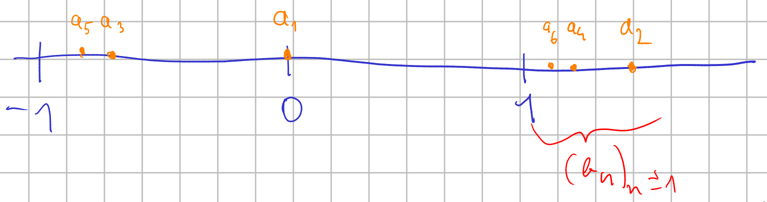
Wähle I_{n+1} als eines der 3 Drittel von I_n, in dem a_{n+1} nicht enthalten ist.

Def. 2.5.7: Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n = a_{l(n)}$ $\forall n \geq 1$, wobei $l: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ eine Abbildung ist mit $l(n+1) > l(n)$ $\forall n \geq 1$.

"springe nicht zurück"

nicht konvergent

Beispiel 2.5.8: Sei $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ und $l(n) = 2n$. Dann ist $a_{l(n)} = 1 + \frac{1}{2n}$. Also ist $(b_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $b_n = 1 + \frac{1}{2n}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$. Genauso wäre $c_n = -1 + \frac{1}{2n+1}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 1}$



$b_n = a_{2n}$ ← konvergent

Satz 2.5.9 (Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bew: Wir wollen eine Intervallschachtelung $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ konstruieren mit:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \mathcal{L}(I_{n+1}) = \frac{1}{2}\cdot \mathcal{L}(I_n) \\ (2) & E_n = \{k \geq 1 \mid a_k \in I_n\} \text{ ist unendlich} \end{array}\right\} \forall n \geq 1.$$

Wähle $I_1 = [a, b]$ so dass $a_n \in I_1 \quad \forall n \geq 1$.
(möglich, da (a_n) beschränkt)

Wähle das nächste Intervall I_{n+1} immer als entweder linke oder rechte Hälfte von I_n, so dass I_{n+1} noch immer unendlich viele Folgenglieder enthält. → (1) gilt

↓ (2) gilt

Wähle nun $\ell(1) = 1$ und $\ell(n+1) \in E_{n+1}$ (induktiv) mit $\ell(n+1) > \ell(n)$.

Wir erhalten eine Teilfolge $b_n := a_{\ell(n)}$ mit:

$$b_n = a_{\ell(n)} \in I_n \quad \text{für alle } n \geq 1, \text{ da } \ell(n) \in E_n = \{k \geq 1 \mid a_k \in I_n\}$$

Da $\mathcal{L}(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, gibt es genau ein $c \in \bigcap_{n\geq 1} I_n$. (Cauchy-Cantor).

Dann gilt für $n \geq 1$, dass sowohl b_n als auch c in I_n enthalten sind.

$$\Rightarrow \quad |b_n - c| \leq \mathcal{L}(I_n) = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$$

und die rechte Seite strebt für $n \to \infty$ gegen 0.

$\Rightarrow$ die Teilfolge $(b_n)_{n \geq 1}$ von $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergiert gegen c. $\square$