Clicker-Frage: $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Abzählung von $[0,1]\cap\mathbb{Q}$

- $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$
- $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$
- $\frac{1}{2}$ als Grenzwert einer Teilfolge? Ja!

Denn in $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right]$ für $n\geq 1$ sind immer unendlich viele rationale Zahlen.

Daher können wir eine Teilfolge $(b_n)_{n\geq 1}$ konstruieren mit

$$b_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$$

Def: Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge. Eine reelle Zahl $c\in\mathbb{R}$ heisst <u>Häufungspunkt</u> von $(a_n)_{n\geq 1}$, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen c konvergiert.

Analog sagt man, dass ∞ bzw $-\infty$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist, wenn es eine Teilfolge gibt, die gegen ∞ bzw. $-\infty$ konvergiert.

Bsp: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Die Häufungspunkte von $(a_n)_{n\geq 1}$ sind: ± 1

Frage: Was ist die Menge aller Häufungspunkte für die Folge aus der Clicker-Frage?

$\to$ jede reelle Zahl in $[0,1]$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$

Setze oben statt $\frac{1}{2}$ einfach c ein

Bemerkung 2.5.10 (erweitert): Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge.

(i) $\liminf_{n\to\infty} a_n$ ist der kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ist der grösste Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$.

(ii) $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen $\ell \in \mathbb{R}$ $\iff$ ℓ ist der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$

2.6 Folgen in $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{C}$

Def 2.6.1: Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^d$$

Wir schreiben a_n statt $a(n)$ und bezeichnen die Folge mit $(a_n)_{n\geq 1}$

Erinnerung: Die euklidische Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^d$ ist definiert durch

$$\|(x_1, \dots, x_d)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2} \qquad \text{für } (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

Def 2.6.2: • Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ heisst konvergent, falls es $a \in \mathbb{R}^d$ gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \ \|a_n - a\| < \varepsilon$$

Falls so ein a existiert, ist es eindeutig bestimmt und nennt sich Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$. Man schreibt: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$

- Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst Cauchy-Folge, wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N: \ \|a_m - a_n\| < \varepsilon$$

- Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heisst beschränkt, wenn:

$$\exists R \geq 0 \ \forall n \geq 1: \ \|a_n\| \leq R$$

Für eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ schreiben wir $a_n = (a_{n,1}, \ldots, a_{n,d})$ für die Koordinaten von a_n.

$b = (b_1, \ldots, b_d)$

Satz 2.6.3

Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$		Koordinatenfolgen $(a_{n,1})_{n\geq 1}, \ldots, (a_{n,d})_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$
konvergent	$\Longleftrightarrow$	alle konvergent
Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = b$	$\Longleftrightarrow$	$\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j$ für $1 \leq j \leq d$
Cauchy-Folge	$\Longleftrightarrow$	alle sind Cauchy-Folgen
beschränkt	$\Longleftrightarrow$	alle beschränkt

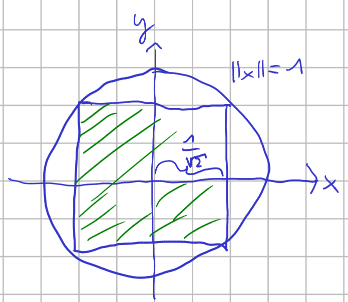
Bemerkung 2.6.4: $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt für $1 \leq j \leq d$:

$$x_j^2 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}_{=\|x\|^2} \leq d \cdot \max_{1\leq i\leq n} x_i^2$$

Also:

$$|x_j| \underset{(**)}{\leq} \|x\| \underset{(*)}{\leq} \sqrt{d} \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

$d=2$:



Bew von Satz 2.6.3:

„$\Rightarrow$"

$\lim_{n\to\infty} a_n = b \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N$

$\|a_n - b\| < \varepsilon$

$\vee\!\!/ \; (**)$

$|a_{n,j} - b_j|$

D.h. aus $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ folgt: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$:

$|a_{n,j} - b_j| \left(\leq \|a_n - b\| \right) < \varepsilon$

D.h. $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j$ für alle $1 \leq j \leq d$

„$\Leftarrow$" $\|a_n - b\| \leq \sqrt{d} \max_{1\leq j \leq d} \underbrace{|a_{n,j} - b_j|}_{< \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}}$ ... das geht, da $a_{n,j} \longrightarrow b_j$.

Lesen Sie im Skript das präzise Argument nach.

Also ist für N "gross genug", für alle $n \geq N$:

$\|a_n - b\| \leq \sqrt{d} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} = \varepsilon \implies \lim_{n\to\infty} a_n = b$ $\square$

$\boxtimes$ ... alle (x,y) mit $\max\{|x|,|y|\} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Wann ist in $\boxtimes$ $\|(x,y)\|$ maximal? $\to$ Genau in den Ecken!

Und dort gilt:

$\underbrace{\|(x,y)\|}_{=1} = \sqrt{2} \max\{|x|,|y|\}$ ← den Gleichheitsfall in $(*)$

$\max\{|x|,|y|\} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Bemerkung</u>: Auf komplexe Folgen angewendet:

eine komplexe Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\iff$ die Folgen $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n\geq 1}$ und $(\mathrm{Im}\, z_n)_{n\geq 1}$ der Real- und Imaginärteile konvergieren

<u>Bsp</u>:

- $z_n = \overbrace{\frac{(-1)^n}{n}}^{\to 0} + \overbrace{\frac{n+1}{n}}^{\to 1} i \longrightarrow 0 + 1 \cdot i = i$ für $n \to \infty$
- $w_n = \frac{i^n}{n}$ $\quad \mathrm{Re}(w_n) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{n} & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$, $\quad \mathrm{Im}(w_n) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow w_n \to 0 \ (n\to\infty)$ | $|w_n - 0| = \frac{|i^n|}{n} = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty) \Rightarrow w_n \to 0$

Bemerkung: Satz 2.1.8 (1)-(3) gilt auch für komplexe Folgen.

SATZ 2.1.8.
Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.
(1) Dann ist $(a_n + b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
(2) Dann ist $(a_n \cdot b_n)_{n\geqslant 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
(3) Nehmen wir zudem an, dass $b_n \neq 0$ $\forall n \geqslant 1$ und $b \neq 0$. Dann ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geqslant 1}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

Bemerkung 2.6.5 Jede konvergente Folge in $\mathbb{R}^d$ ist beschränkt

Satz 2.6.6:

(1) Eine Folge in $\mathbb{R}^d$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

(2) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$ hat eine konvergente Teilfolge.

Bw von (2): Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^d$.
$\Rightarrow$ alle Koordinatenfolgen sind beschränkt.

Idee: Beginne mit $(a_{n,1})_{n\geq 1}$ $\Rightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge $(a_{\ell(n),1})_{n\geq 1}$. Und jetzt betrachte $(a_{\ell(n),2})_{n\geq 1}$. Beschränktheit $\Rightarrow$ auch diese Folge hat eine konvergente Teilfolge ...
Mache das d-mal. Für die letzte Indexfolge $L(n)$ gilt, dass $(a_{L(n)})_{n\geq 1}$ konvergiert. "$\square$"

2.7 Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Reihe ... $\sum_{k=1} a_k \longleftrightarrow$ Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n$$

Def 2.7.1: Die Reihe $\sum_{k=1} a_k$ heisst konvergent, wenn die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen konvergiert. In diesem Fall definieren wir den Wert der Reihe als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$$

Achtung: Oft wird in der Notation nicht zwischen Reihe und Wert der Reihe unterschieden, und einfach $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ geschrieben.

Notation: $z = x + iy \in \mathbb{C} \rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

<u>Beispiel 2.7.2</u> (geometrische Reihe). Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ und der Wert der Reihe ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{"} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots \text{"}$$

<u>Bew:</u> Sei $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \dots + q^n$

$$qS_n = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

Daher gilt $(1-q)S_n = S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[\text{komplexe Folgen)}]{\text{(Rechenregeln für konvergente}} \frac{1}{1-q} \quad \text{für } n \to \infty$$

Wobei $q^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt, da $|q| < 1$ (Beispiel 2.2.3)

<u>Bsp:</u> $$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

<u>Beispiel 2.7.3</u> (harmonische Reihe)

Die Reihe $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ divergiert (Beispiel 1.7.17 (ii))

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

Die Partialsummen S_n konvergieren nicht.

Satz 2.7.4 Seien $\sum_{k=1} a_k$ und $\sum_{k=1} b_k$ konvergent und $\alpha \in \mathbb{C}$.

(1) Dann ist $\sum_{k=1} (a_k + b_k)$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

(2) Dann ist $\underline{\sum_{k=1} \alpha \cdot a_k}$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Bew: (2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ... Folge der Partialsummen von $\sum_{k=1} a_k$

Dann gilt $S_n \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach Annahme.

Partialsummen von $\sum_{k=1} \alpha \cdot a_k$: $T_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha \cdot S_n$. $\longrightarrow \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} S_n$

D.h. $\lim_{n\to\infty} T_n = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} S_n$

$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

Frage: Ist jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Reihe? Ja: Jede Folge ist eine Reihe der Folge der Differenzen.

$b_1 = a_1$, $b_n = a_n - a_{n-1}$ für $n \geq 2$. Dann ist $\sum_{k=1} b_k$ "dasselbe" wie die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$.

[Partialsummen S_n von $\sum_{k=1} b_k$:

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \cancel{b_1} + (\cancel{b_2} - \cancel{b_1}) + (\cancel{b_3} - \cancel{b_2}) + \cancel{\ldots} + (b_n - \cancel{b_{n-1}}) = b_n$]

Aber: (Unendliche) Summen treten in der Theorie und Anwendung häufig auf natürliche Art und Weise auf.

Schon in der Antike: z.B. Zeno's Paradoxien

In der modernen Elektrotechnik: z.B. Fourierreihen

↳ die Perspektive von Reihen ist oft sehr nützlich