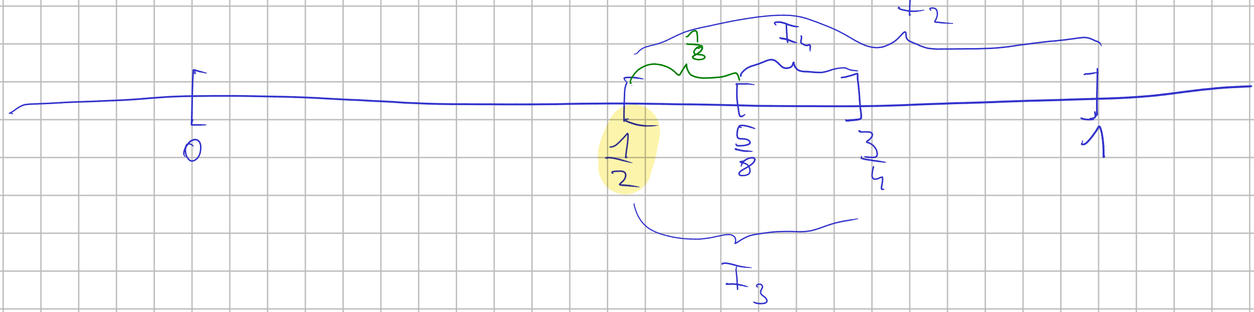
Clicker-Frage: (Eine Intervallschachtelung)

Beginnen wir mit $I_1 = [0,1]$ und konstruieren wir eine Intervallschachtelung $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ indem wir immer abwechselnd die rechte und die linke Hälfte als Folgeintervall wählen.

D.h.: $I_{n+1} = \begin{cases} \text{abgeschlossene rechte Hälfte von } I_n, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \\ \text{abgeschlossene linke Hälfte von } I_n, & \text{falls } n \text{ gerade}. \end{cases}$

Was ist der Wert von $c \in \mathbb{R}$, so dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$?



$$c = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Satz 2.7.5 (Cauchy-Kriterium) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

für alle $m \geq n \geq N$.

$|S_m - S_{n-1}|$

Als nächstes: nichtnegative Reihen und absolute Konvergenz

Satz 2.7.6: Sei $\sum_{k=1} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \geq 1$.
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1} a_k$ genau dann, wenn die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$ der Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Bew: $S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n \implies (S_n)_{n\geq 1}$ monoton wachsend.

2 Fälle:
- $(S_n)_{n\geq 1}$ beschränkt $\implies (S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert (Satz von Weierstrass)
- $(S_n)_{n\geq 1}$ unbeschränkt $\implies (S_n)_{n\geq 1}$ konvergiert nicht. $\square$

Bemerkung: Für eine Reihe $\sum_{k=1} a_k$ mit $a_k \geq 0$ gibt es nur 2 Möglichkeiten:

1) die Partialsummen sind beschränkt $\overset{\text{(Satz 2.7.6)}}{\implies} \sum_{k=1} a_k$ konvergiert

2) die Partialsummen konvergieren gegen ∞

Notation:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$

Korollar 2.7.7 (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=1} a_k$ und $\sum_{k=1} b_k$ Reihen mit $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \geq 1$. Dann gelten:

$$\sum_{k=1} b_k \text{ konvergiert} \implies \sum_{k=1} a_k \text{ konvergiert}$$

$$\sum_{k=1} a_k \text{ divergiert} \implies \sum_{k=1} b_k \text{ divergiert}$$

Beispiel 2.7.8:

- $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 - k}$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} =$$

($A, B \in \mathbb{R}$, zu bestimmen)

Bestimmung von A, B: $B = 1$, $A = -1$

$$= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + - \dots$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{(n \to \infty)} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$$

- $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$

Es gilt für alle $k \geq 2$, dass $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$. Die Reihe aller $\frac{1}{k(k-1)}$ konvergiert. Vergleichssatz $\Rightarrow \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Über den Wert wissen wir nur: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Def 2.7.9: Die Reihe $\sum_{k \geq 1} a_k$ heisst <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum_{k \geq 1} |a_k|$ konvergent ist.

Satz 2.7.10: Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k \geq 1} a_k$ ist auch konvergent und es gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

"Dreiecksungleichung für Reihen"

Bew: Cauchy angewandt auf $\sum_{k \geq 1} |a_k|$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq n \geq N : \left| \sum_{k=n}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon$$

das wussten wir

$$\text{Dreiecksungl.} \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n \geq N$$

d.h. das Cauchy-Kriterium ist für $\sum_{k \geq 1} a_k$ erfüllt $\Rightarrow \sum_{k \geq 1} a_k$ konvergiert.

(*) gilt für alle $m \geq n$. Wähle $n=1$ und nehme den Grenzwert für $m \to \infty$ $\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ $\square$

Beispiel 2.7.11: Die Reihe $\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

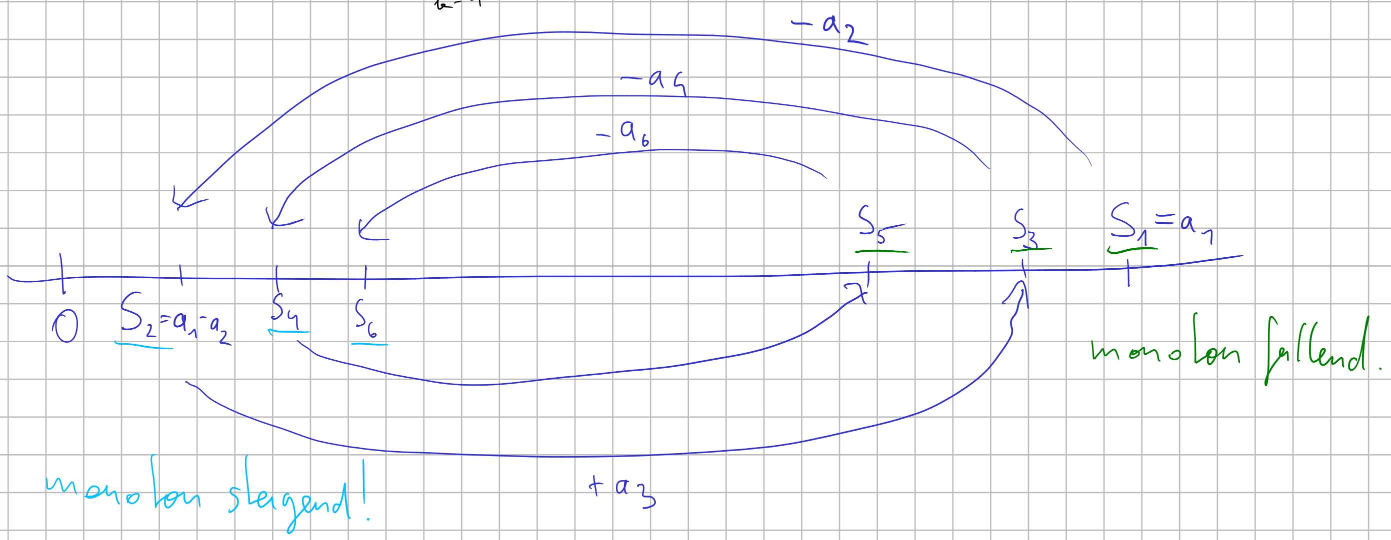
- konvergiert nicht absolut, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.
- konvergiert!

Beispiel: $\sum_{k\geq 1} (-1)^k$. Die Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & , n \text{ ungerade} \\ 0 & , n \text{ gerade} \end{cases}$ konvergieren nicht! $\Rightarrow \sum_{k\geq 1} (-1)^k$ konvergiert nicht.

Satz 2.7.12 (Leibniz)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend mit $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} a_k$ und es gilt $a_1 - a_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \leq a_1$

Bew: Sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$.



Die Teilfolge $(S_{2n-1})_{n\geq 1}$ ist monoton fallend

Die Teilfolge $(S_{2n})_{n\geq 1}$ ist monoton steigend

Beide Teilfolgen sind beschränkt $\overset{\text{(Weierstrass)}}{\Rightarrow}$ Konvergenz von $(S_{2n}), (S_{2n-1})$

da $S_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_1 \quad \forall n \geq 1$

$$S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{2n}}_{0} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$$

Da sowohl die "ungerade" als auch die "gerade" Teilfolge von $(S_n)_{n\geq 1}$ gegen den selben Grenzwert konvergieren, konvergiert $(S_n)_{n\geq 1}$.

Ausserdem gilt: $a_1 - a_2 = S_2 \leq S_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_1 = a_1 \quad \forall n \geq 1$

Grenzwert für $n\to\infty \Rightarrow a_1 - a_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \leq a_1$ $\square$

Beispiel 2.7.13: Alternierende harmonische Reihe:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq S \leq 1.$$

$S = \log 2$
(später)

Nun ordnen wir geschickt um:

Wir nehmen für $n \geq 1$ immer 3er-Gruppen:

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}$$

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{n=2} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{n=3}$$

"Umgeordnete alt. harm. Reihe"

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \ldots\right) = \frac{1}{2} \cdot S \;!$$

hat plötzlich den Wert $\frac{1}{2} \cdot S$?

Was ist hier los?

Def 2.7.14 (erweitert)

- Eine Reihe $\sum_{k=1} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \geq 1$ heisst **bedingt konvergent**, wenn $\sum_{k=1} a_k$ konvergent ist, aber nicht absolut konvergent.

- Eine Reihe $\sum_{k=1} a_k'$ ist eine **Umordnung** der Reihe $\sum_{k=1} a_k$, wenn es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ gibt mit $a_k' = a_{\sigma(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Bem.: Das Beispiel oben hat gezeigt, dass Umordnungen von bedingt konvergenten Reihen andere Werte haben können als die Ausgangsreihe.

Es gilt sogar: **Riemannscher Umordnungssatz**: Sei $\sum_{k=1} a_k$ eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen und $A \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Umordnung $\sum_{k=1} a_k'$ der Reihe $\sum_{k=1} a_k$, so dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k' = A$.

Für absolut konvergente Reihen haben wir mehr Glück:

Satz 2.7.16 (Dirichlet) Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe absolut und jede Umordnung hat denselben Wert.