Konvergenzkriterien:

Schon bekannt:
- Leibniz-Kriterium
- Cauchy-Kriterium
- Vergleichssatz

KOROLLAR 2.7.7 (Vergleichssatz). *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *Reihen mit:*

$$0 \leqslant a_k \leqslant b_k \qquad \forall k \geqslant 1.$$

Dann gelten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ \textit{divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \ \textit{divergent}$$

Die Implikationen treffen auch zu, wenn es $K \geqslant 1$ *gibt, so dass*

$$0 \leqslant a_k \leqslant b_k \qquad \forall k \geqslant K.$$

Heute:
- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium

Satz 2.7.16 (Dirichlet) Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe absolut (1) und jede Umordnung hat denselben Wert (2).

Bew: (1) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ die umgeordnete Reihe, $\sigma: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ Bijektion.

Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\max\{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

fixe reelle Zahl.

D.h. die Partialsummen sind beschränkt!

$\Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_{\sigma(k)}$ konvergiert absolut

(2) Cauchy-Kriterium auf $\sum_{k\geq 1} |a_k|$: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq n \geq N$

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \dots + |a_m| \leq \varepsilon$$

$m \to \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$

Wähle $M \geq N$ so, dass $\{1, \dots, N\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(M)\}$

Dann gilt für $m \geq M$: $\quad \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(m)\}$

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

damit in der linken Summe $a_1, \dots, a_N$ vorkommen.

hier fallen alle $a_1, \dots, a_N$ weg

$m \to \infty \quad \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ am Anfang beliebig war, folgt heraus $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\square$

Satz 2.7.17 (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0 \; \forall n \geq 1$. Dann gilt:

(1) $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert absolut.

(2) $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_k$ divergiert

Im Skript: $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_k$ divergiert.

Bew: (1) Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Bedingung an limsup $\Rightarrow \exists q \in \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, 1\right)$

Eigenschaft des limsup (Vorlesung am 4.3) $\Rightarrow \exists K: \forall k \geq K:$

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q \iff |a_{k+1}| \leq q \cdot |a_k|$$

Für $n > K$ gilt: $|a_n| \leq q \cdot |a_{n-1}| \leq q^2 |a_{n-2}| \leq \dots \leq q^{n-K} |a_K|$

Da $\sum_{n=1} \frac{|a_K|}{q^K} q^n$ konvergiert, folgt aus dem Vergleichssatz, dass $= \frac{|a_K|}{q^K} \cdot q^n$

auch $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ konvergiert.

(2) die gelbe Bedingung impliziert, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ nicht gegen 0 konvergiert.

Clicker $\Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_k$ konvergiert nicht $\square$

Beispiel 2.7.18 (Die Exponentialfunktion)

Für $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Reihe mit allgemeinem Glied $\frac{z^k}{k!}$

$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$

also: $$\sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$$ ... Exponentialreihe

Dann gilt für $z \neq 0$: $$\frac{\frac{|z^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|z^n|}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty$$

Quotientenkriterium $\Rightarrow \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert absolut.

Wir definieren die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

durch $$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

beachte: $\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1$

da $0^0 = 1$ als Konvention.

Bem. 2.7.19: Das Quot. krit versagt, wenn $a_n = 0$ für unendlich viele n.

Satz 2.7.20 (Wurzelkriterium) Sei $\sum_{k=1} a_k$ eine Reihe.

(1) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1} a_k$ konvergiert absolut.

(2) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1} a_k$ divergiert.

($\limsup = 1 \Rightarrow$ keine Aussage möglich)

Bew: (1) Wieder Vergleich mit geom. Reihe. Wähle $q \in (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, 1)$

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N}: \forall k \geq K: \sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \Leftrightarrow \quad |a_k| \leq q^k$

geom. Reihe konvergiert $\overset{\text{(Vergl. satz)}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1} |a_k|$ konvergiert.

(2) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow$ es gibt eine Teilfolge $(a_{\ell(n)})_{n\geq 1}$ so

dass $\forall n \geq 1: \sqrt[\ell(n)]{|a_{\ell(n)}|} \geq 1 \Rightarrow |a_{\ell(n)}| \geq 1 \quad \forall n \geq 1$

$\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert nicht gegen 0. $\overset{\text{Clicker}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1} a_k$ divergiert

□

Beispiel: $\sum_{k=1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k} = \underset{k=1}{1} + \underset{k=2}{\frac{1}{8}} + \underset{k=3}{\frac{1}{4}} + \underset{k=4}{\frac{1}{32}} + \dots \qquad \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k}}_{a_k} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, & k \text{ gerade} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, & k \text{ ungerade} \end{cases}$

Quotientenkriterium? $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = 2 & k \text{ gerade} \\ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}} = \frac{1}{8} & k \text{ ungerade} \end{cases}$

$\limsup_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 2 \Rightarrow$ Keine Aussage aus Quotientenkriterium.

Wurzelkriterium? $\sqrt[k]{|a_k|} = "\sqrt[k]{\left(\frac{1}{2}\right)^{k\pm 1}}" = "\underbrace{\sqrt[k]{\left(\frac{1}{2}\right)^{\pm 1}}}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ \text{für } k\to\infty}}" \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{2}$

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz.

<u>Potenzreihen:</u> Sei $(c_k)_{k\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Sei $R := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

Wir definieren

$$\rho := \begin{cases} \frac{1}{R} & \text{falls } R \in (0,\infty) \\ \infty & \text{falls } R = 0 \\ 0 & \text{falls } R = \infty \end{cases}$$

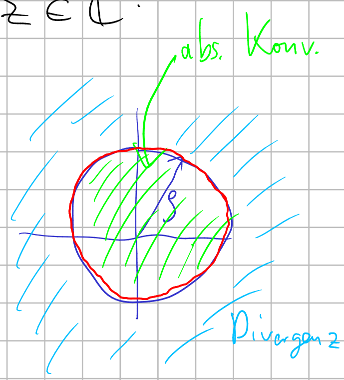
<u>Def:</u> Sei $z \in \mathbb{C}$ und $(c_k)_{k\geq 1}$ und ρ wie oben. Die Reihe

$$\sum_{k\geq 1} c_k z^k$$

heisst eine <u>Potenzreihe</u> (in der Variablen z). Die Zahl ρ ist der <u>Konvergenzradius</u>.

<u>Korollar 2.7.21:</u> Sei $\sum_{k\geq 1} c_k z^k$ eine Potenzreihe und ρ ihr Konvergenzradius. Dann gilt für $z \in \mathbb{C}$:

- $|z| < \rho \implies \sum_{k\geq 1} c_k z^k$ konvergiert absolut
- $|z| > \rho \implies \sum_{k\geq 1} c_k z^k$ divergiert



Für $|z| = \rho$ kann $\sum_{k\geq 1} c_k z^k$ konvergieren oder divergieren

<u>Bew:</u> Falls $R < \infty$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|\,|z|^n} = |z| \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |z| \cdot R.$$

Es gilt $|z| \cdot R < 1 \iff \underbrace{|z| < \rho}_{\text{Wurzelkrit.} \Rightarrow \text{abs. Konv.}}$ und $|z|\,R > 1 \iff \underbrace{|z| > \rho}_{\text{Wurzelkrit.} \Rightarrow \text{Divergenz}}$

Wenn $R = \infty$: dann ist $\rho = 0$. Dann gilt für $z \neq 0$, dass $\limsup_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{|c_n|\,|z|^n}}_{\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z|} = \infty$

Wurzelkrit. $\Rightarrow$ Divergenz. $\square$

<u>Bemerkung:</u> $\sum_{k=1} \frac{1}{k} z^k$ hat Konvergenzradius 1, und konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ausser $z = 1$.