Letztes Mal:

- Quotientenkriterium
- Def. der Exponentialfunktion
- Wurzelkriterium
- Potenzreihen

Heute:

- Doppelreihen, Cauchy-Produkt
- etwas mehr über die Exponentialfunktion | Kap. 2
- Reellwertige Funktionen | Kap. 3

Doppelreihen:

Def: Eine reelle bzw. komplexe Doppelfolge ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$. Wir schreiben $a_{ij} := a(i,j)$ und $(a_{ij})_{i,j=0}$ für die Doppelfolge.

Wir betrachten nun das folgende Schema zur Summation:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{00} & + & a_{01} & + & a_{02} & + & \dots & = & S_0 \\
+ & & + & & + & & & & + \\
a_{10} & + & a_{11} & + & a_{12} & + & \dots & = & S_1 \\
+ & & + & & + & & & & + \\
a_{20} & + & a_{21} & + & a_{22} & + & \dots & = & S_2 \\
+ & & + & & + & & & & + \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & & & = ? \\
u_0 & + & u_1 & + & u_2 & + & \dots & = & ? \quad \cancel{=} ?
\end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\underset{a_{00}}{1} & + & \underset{a_{01}}{-1} & + & 0 & + & \cdots & = & 0 & = S_0 \\
+ & & + & & + & & & & + & \\
0 & + & \underset{a_{11}}{1} & + & \underset{a_{12}}{-1} & + & \cdots & = & 0 & = S_1 \\
+ & & + & & + & & & & + & \\
0 & + & 0 & + & \underset{a_{22}}{1} & + & -1 \;\cdots & = & 0 & = S_2 \\
+ & & + & & + & & & & + & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & & & 0 & = \sum_{i=0}^{\infty} S_i \\
1 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & = & 1 & \neq 0 \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & \\
u_0 & & u_1 & & u_2 & & & & \sum_{j=0}^{\infty} u_j &
\end{array}$$

$m=2$ $\quad m=2$

$\rightarrow$ Gegeben eine Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j=0}$ kann es sein, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} S_i \qquad = 0$$

und

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \qquad = 1$$

konvergieren, aber unterschiedliche Werte haben

Def 2.7.22 (modifiziert) Sei $(a_{ij})_{i,j=0}$ eine Doppelfolge.

Wir nennen eine Folge $(b_k)_{k=0}$ eine <u>lineare Anordnung</u> von $(a_{ij})_{i,j=0}$ wenn es eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gibt, so dass $b_k = a_{\sigma(k)}$

Satz 2.7.23 (Doppelreihensatz) Sei $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$ eine Doppelfolge

Wir nehmen an, dass $B \geq 0$ existiert, so dass für alle $m \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B$$

Dann konvergieren die Reihen

$$\sum_{i\geq 0} a_{ij} \quad \forall j \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j \geq 0} a_{ij} \quad \forall i \geq 0$$

absolut. Für die Werte $S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ und $U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ sind auch die Reihen

$$\sum_{i\geq 0} S_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{j\geq 0} U_j$$

absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = \sum_{j=0}^{\infty} U_j =: S$$

Ist $(b_k)_{k\geq 0}$ eine lineare Anordnung der Doppelfolge $(a_{ij})_{i,j\geq 0}$, dann ist auch $\sum_{k\geq 0} b_k$ absolut konvergent und

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = S.$$

Bew: ähnlich wie der Beweis des Umordnungssatzes, siehe Skript.

Anwendung: Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum_{i=0} a_i$ und $\sum_{j=0} b_j$ zwei Reihen. Wie könnte das "Produkt" definiert werden?

Heuristik: $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) =$

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
a_0 b_0 & & a_0 b_0 & + & a_0 b_1 & + & a_0 b_2 & + & \dots & = & S_0 \\
 & & + & & + & & + & & & & + \\
a_1 b_0 + a_0 b_1 & & a_1 b_0 & + & a_1 b_1 & + & a_1 b_2 & + & \dots & = & S_1 \\
 & & + & & + & & + & & & & + \\
a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 & & a_2 b_0 & + & a_2 b_1 & + & a_2 b_2 & + & \dots & = & S_2 \\
 & & + & & + & & + & & & & + \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & \| & & \| & & \| & & & & \\
 & & U_0 & + & U_1 & + & U_2 & + & \dots & &
\end{array}
$$

Def 2.7.24: Das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{i=0} a_i$ und $\sum_{j=0} b_j$ ist die Reihe
$$\sum_{n=0} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + \dots$$

Satz 2.7.26: Falls die Reihen $\sum_{i=0} a_i$ und $\sum_{j=0} b_j$ absolut konvergieren, dann konvergiert das Cauchy-Produkt absolut und es gilt:
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

Bew: Wir wenden den Doppelreihensatz an.

$$B := \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|\right) \qquad d_{ij} := a_i \cdot b_j$$

Ist die Voraussetzung erfüllt?
$$\sum_{i,j=0}^{m} |a_{ij}| = \sum_{i,j=0}^{m} |a_i||b_j| =$$
$$= (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_m|)(|b_0| + \ldots + |b_m|)$$
$$\leq B. \qquad \forall m \geq 0!$$

Doppelreihensatz

$$\text{Satz} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j}_{= a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left(a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)$$

$\square$

Anwendung 2.7.27 (Additionstheorem der Exponentialfunktion)

Erinnerung: für $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^k}{k!} + \ldots$

wobei die Reihe $\sum_{k=0} \frac{z^k}{k!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Additionstheorem: $\forall w, z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

Bew: $$\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n$$

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n\right)$$

$$\overset{\text{Cauchy-Prod}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-j)!} z^{n-j} \cdot \frac{1}{j!} w^j = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \overbrace{\frac{n!}{(n-j)!\,j!}}^{\binom{n}{j}} z^{n-j} w^j}_{= (z+w)^n}$$

(nach binom. Lehrsatz)

für $z=1$: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = \exp(z+w)$

Korollar 2.7.29: Für jedes $z\in\mathbb{C}$ konvergiert die Folge $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\ge 1}$ und $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$.

Insbesondere ist $\exp(1) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Additionstheorem $\Longrightarrow$ $\exp(m) = \exp(1+\dots+1) = \exp(1)^m = e^m$

$$\exp\left(\frac{1}{m}\right)^m = \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{m}+\dots+\frac{1}{m}}_{m\text{ mal}}\Big) = \exp(1) = e$$

$$\Rightarrow \exp\left(\frac{1}{m}\right) = \sqrt[m]{e} = e^{\frac{1}{m}}$$

$\to$ In Zukunft schreiben wir auch e^z für $\exp(z)$. $(z\in\mathbb{C})$.

Bew: (1)
$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \overset{\text{binom. Lehrsatz}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{z}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{1}{n^k}\cdot z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}\,\frac{z^k}{k!}$$

Für jedes fixe $k\ge 0$ gilt: $\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$

$$\xrightarrow[(k\text{ fest!})]{n\to\infty} 1.$$

Here, a miracle occurs.

(2)
$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{(n-k)!\,n^k}}_{\to 1 \text{ für jedes } k}\cdot\frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \exp(z).$$

Kapitel 3: Stetige Funktionen

3.1 Reellwertige Funktionen

Sei D eine Menge. Die Menge $\mathbb{R}^D$ aller Funktionen von D nach $\mathbb{R}$ hat die Struktur eines $\mathbb{R}$-Vektorraums:

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$$
$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x)$$

für $f, f_1, f_2 \in \mathbb{R}^D$, $x \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gibt auch ein Produkt:

$$(f_1 \cdot f_2)(x) := f_1(x) \cdot f_2(x)$$

Eine konstante Funktion ist eine solche, die für alle $x \in D$ denselben Wert annimmt. Wichtig: $\underline{0}, \underline{1} \in \mathbb{R}^D$ definiert durch

$$\underline{0}(x) := 0$$
$$\underline{1}(x) := 1$$

für alle $x \in D$.

Addition und Multiplikation von Funktionen ist assoziativ, kommutativ, und das Distributivgesetz gilt. Ausserdem ist $f + \underline{0} = f$ und $f \cdot \underline{1} = f$ für alle $f \in \mathbb{R}^D$.

$(\mathbb{R}^D, +, \cdot)$ erfüllt alle Körperaxiome ausser: Wenn $|D| \geq 2$, dann gibt es $f \neq \underline{0}$, die aber kein (multiplikatives) Inverses besitzen. (zB wenn $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$. $x_1 \neq x_2$)

Auf $\mathbb{R}^D$ definieren wir die Ordnung $\leq$ durch

$$f \leq g \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x \in D: \; f(x) \leq g(x)$$

Eine Funktion $f \in \mathbb{R}^D$ heisst <u>nichtnegativ</u>, falls $f \geq 0$

$(\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in D)$

<u>Bsp</u>: $D = \{1\} \Rightarrow \mathbb{R}^D$ ... alle Funktionen von $\{1\}$ nach $\mathbb{R}$. $\Rightarrow \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^1$.

$D = \{1, \dots, n\} \Rightarrow \mathbb{R}^D = \mathbb{R}^n$

$D = \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}^D$ ... der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen.

<u>Def 3.1.1</u>: Sei $f \in \mathbb{R}^D$.

Bildmenge von f

(1) f heisst <u>nach oben beschränkt</u>, falls $f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$ nach oben beschränkt ist.

(2) f heisst <u>nach unten beschränkt</u>, falls $f(D)$ nach unten beschränkt ist.

(3) f heisst <u>beschränkt</u>, falls $f(D)$ beschränkt ist.

<u>Def 3.1.2</u>: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$.

(1) + (2) f heisst (streng) <u>monoton wachsend</u>, falls:

$$\forall x, y \in D: \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

(3) +(4) f heisst (streng) monoton fallend, falls:

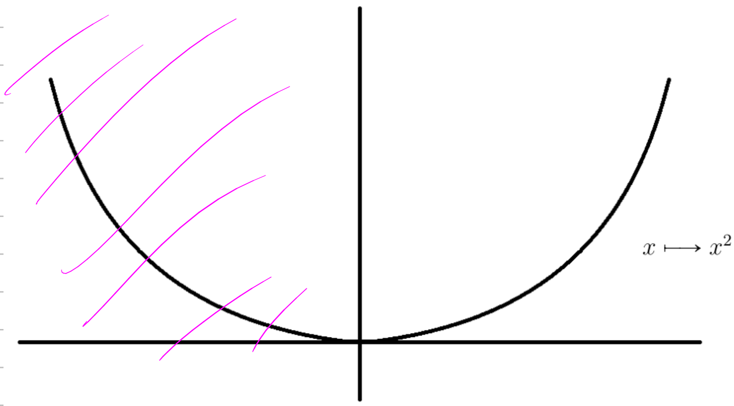
$$\forall x,y \in D: \quad x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$$

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

(5) +(6) f heisst (streng) monoton, falls f (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Bsp. 3.1.3: Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

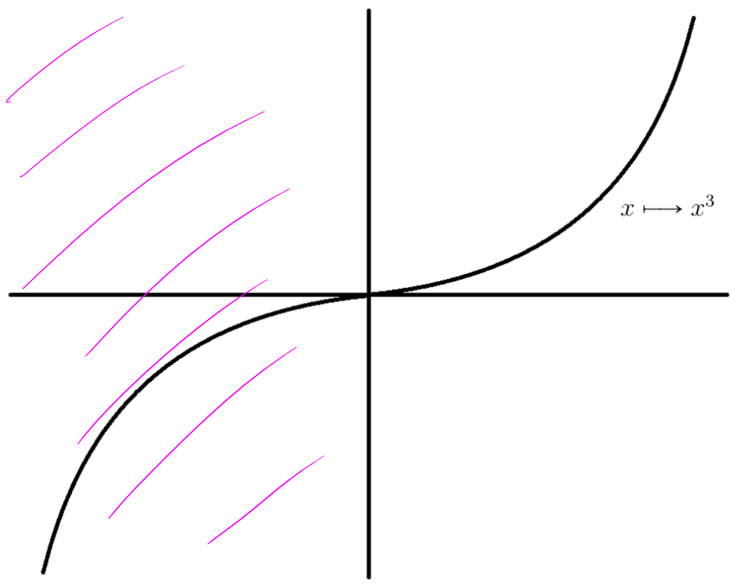
- $D = \mathbb{R}$: f ist genau dann streng monoton wachsend, wenn n ungerade ist.



hier monoton fallend

hier monoton wachsend.

! hier nennen wir f nicht monoton.



- $D = [0, \infty)$: f ist genau dann stren monoton wachsend, wenn $n \ge 1$.