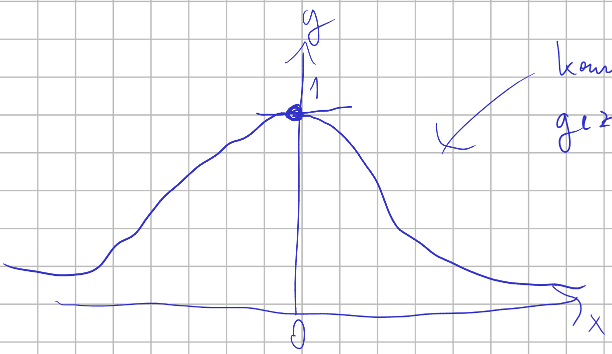
Clicker-Frage: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ $x_n = \frac{1}{n}$.

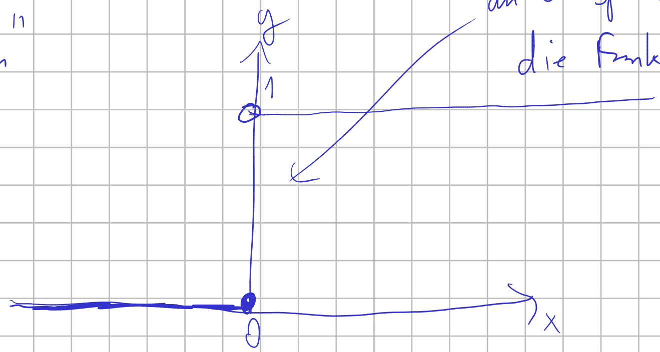
$$f(0) = 1 \qquad\qquad g(0) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^2}_{\to 0}+1} = 1 \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} \overbrace{g(x_n)}^{=1} = 1 \neq 0$$

kann "ohne Absetzen" gezeichnet werden



an 0 "springt" die Funktion



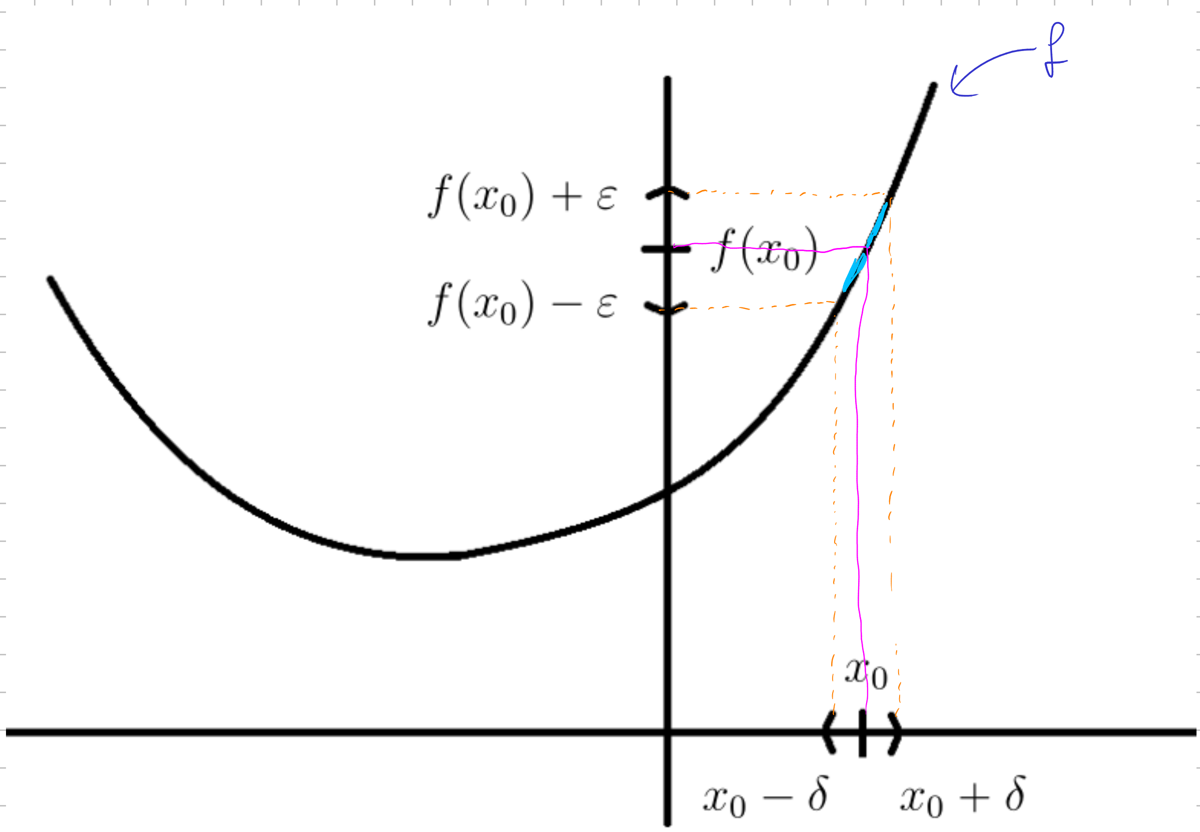
3.2 Stetigkeit

"ε-δ-Definition"

Def 3.2.1: Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist <u>stetig in x_0</u> wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta > 0 : \forall x \in D: \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Def 3.2.2: Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist <u>stetig</u>, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.



δ ist abhängig von ε so gewählt, dass

$$f\big((x_0-\delta, x_0+\delta)\cap D\big) \subset \big(f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon\big)$$

Beispiel 3.2.3:

(1) Für $n\in\mathbb{N}$ ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^n$ stetig.

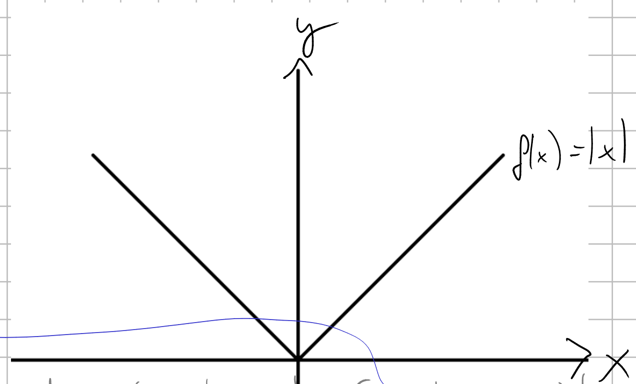
Bew. für $n=1$: $f(x)=x$. Sei $x_0\in\mathbb{R}$. Dann ist $|f(x)-f(x_0)| = |x-x_0|$

D.h. gegeben $\varepsilon>0$, können wir $\delta=\varepsilon$ wählen und gilt: $|x-x_0| < \underset{=\varepsilon}{\delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(x_0)|}_{=|x-x_0|} < \varepsilon$

(2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto |x|$ ist stetig

Bew: Sei $x_0\in\mathbb{R}$. Dann ist

$$\big||x|-|x_0|\big| \underset{\text{umgekehrte }\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x-x_0| < \delta = \varepsilon$$

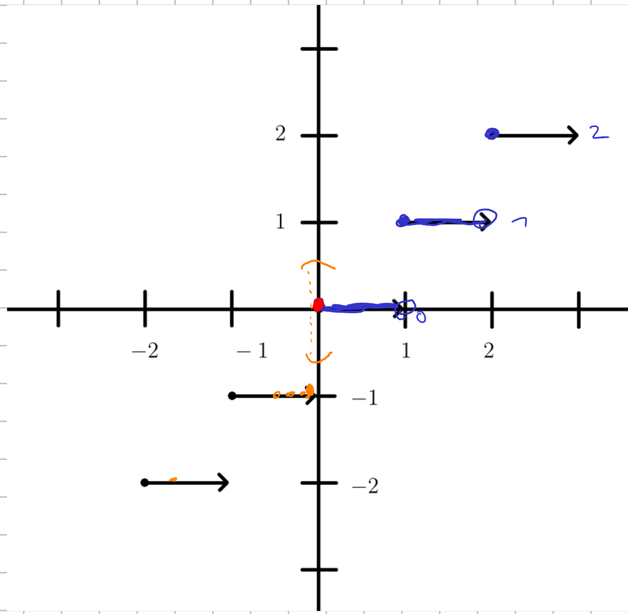


D.h. gegeben $\varepsilon>0$, können wir $\delta=\varepsilon$ wählen, und gilt: $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

(3) Die Abrundungsfunktion $[\cdot]$ $\cancel{[\cdot]}$

$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{ m \in \mathbb{Z} \mid m \le x \}$

ist stetig in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und unstetig in allen $x_0 \in \mathbb{Z}$.



Bsp: $x_0 = 0$: Wähle z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Dann gilt $\forall \delta > 0$, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $|x| < \delta$ aber $|\lfloor x \rfloor| \ge \frac{1}{2}$.

Und zwar: Für $\delta > 0$ wähle $x := -\frac{\delta}{2}$. Dann gilt $|x| < \delta$ und $\lfloor x \rfloor \le -1 \Rightarrow |\lfloor x \rfloor| \ge 1 \ge \frac{1}{2} = \varepsilon$. $\Rightarrow \lfloor \cdot \rfloor$ unstetig in x_0.

Andererseits: $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

(4) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nur in $x_0 = \frac{1}{2}$ stetig und in allen anderen Punkten unstetig.

Satz 3.2.4 Sei $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f ist genau dann stetig in x_0, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \ge 1}$ in D gilt:

"Folgenstetigkeit"

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

Bew: „$\Rightarrow$" Sei f stetig in x_0 und $(a_n)_{n \ge 1}$ eine Folge in D mit $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Stetigkeit in $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Da $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n \geq N: |a_n - x_0| < \delta$.

Zusammen ergibt dies:

$$|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

D.h. $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

"$\Leftarrow$" Angenommen, f ist in x_0 nicht stetig. D.h. $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in D: |x - x_0| < \delta \; \wedge \; |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

Wähle so ein $\varepsilon > 0$. Dann finden wir für jedes $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ein $a_n \in D$ so dass $|a_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Es folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ <u>aber</u> $(f(a_n))_{n\geq 1}$ kann nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren (da $|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$)

D.h. wir haben eine Folge gefunden, so dass die Implikation im Satz nicht gilt. $\square$

<u>Korollar 3.2.5</u>: Sei $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g: D \to \mathbb{R}$ beide stetig in x_0.

(1) Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ stetig in x_0.

(2) Falls $g(x_0) \neq 0$, dann ist

$$\frac{f}{g}: \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0.

Bew: (2) Um die Stetigkeit von $\frac{f}{g}$ in x_0 nachzuweisen, nehmen wir gemäss Satz 3.2.4 eine Folge (a_n) in $\{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, die gegen x_0 konvergieren. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(x_0) \neq 0$$

(da f, g in x_0 stetig sind und Satz 3.2.4). Aus dem Satz 2.1.8 über konvergente Folgen folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{g(a_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

□

Definition 3.2.6: Eine <u>polynomiale Funktion</u> $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Falls $a_n \neq 0$, dann ist n der <u>Grad</u> von P.

Korollar 3.2.7: Polynomiale Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

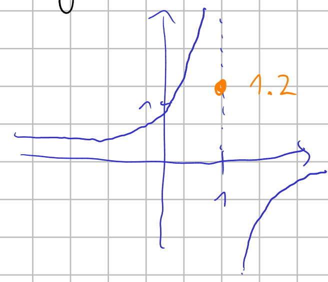
Korollar 3.2.8: Seien P, Q polynomiale Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $Q \neq 0$. Seien $x_1, \dots, x_m$ die Nullstellen von Q. Dann ist

$$\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

stetig.

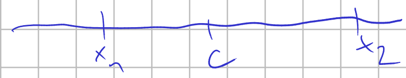
Bsp:
- $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
- Wenn wir f durch einen Wert $f(1) = c$ "fortsetzen" auf $\mathbb{R}$

dann wäre die fortgesetzte Funktion nicht stetig in $x_0 = 1$.

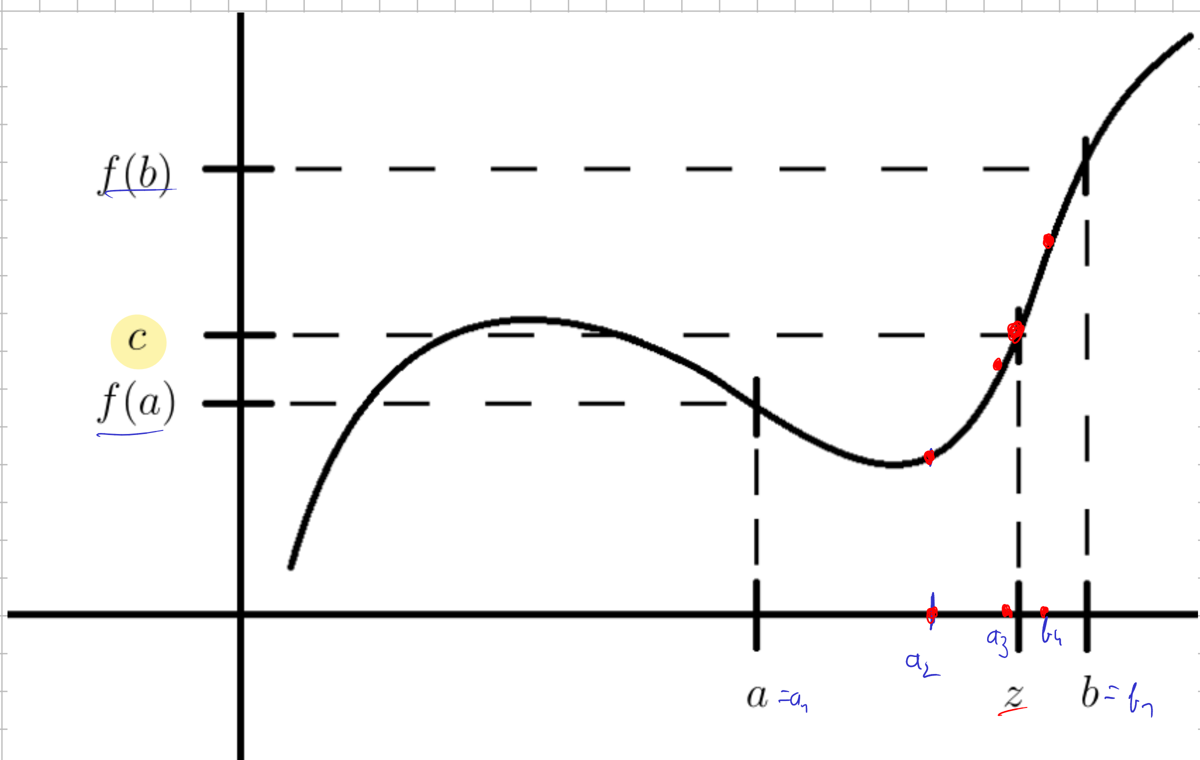


3.3 Der Zwischenwertsatz

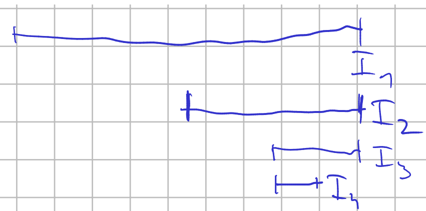
Def: Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sagen wir, dass c zwischen x_1 und x_2 liegt, falls $c \in [\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}]$



Satz 3.3.1 (Zwischenwertsatz) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $a, b \in I$. Dann gibt es für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b so dass $f(z) = c$



Bew: (anders als im Skript)



O.B.d.A sei $a \le b$.

Auch o.B.d.A. können wir $f(a) \le f(b)$ annehmen. (Ansonsten könnten wir f durch $-f$ ersetzen.) $\qquad I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$

Wir wollen eine Intervallschachtelung konstruieren, so dass $z \in \mathbb{R}$ mit $\{z\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ genau die gewünschte Eigenschaft hat, dass $f(z) = c$.

$I_1 = [a,b]$. $\quad a_1 = a$, $\quad b_1 = b$. $\quad f(a_1) \leq c$ und $f(b_1) \geq c$

<u>Idee</u>: in jedem Schritt betrachten wir den Mittelpunkt $\frac{a_n + b_n}{2}$ der Grenzen des vorigen Intervalls $I_n = [a_n, b_n]$.

$$f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \begin{cases} \leq c & \to \text{ dann nehmen wir } a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ und } b_{n+1} = b_n \\ \geq c & \to \text{ dann nehmen wir } b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \text{ und } a_{n+1} = a_n \end{cases}$$

$I_n = [a_n, b_n]$

Mit dieser Konstruktion erhalten wir eine Intervallschachtelung mit:

1) $\mathcal{L}(I_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}(I_n) \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{z\}$ (Satz über Int. schacht.)

2) $f(a_n) \leq c$ und $f(b_n) \geq c$ $\quad \forall n$

Aus 1) folgt auch, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = z$ $\quad$ (da $a_n, b_n, z \in I_n$)

Stetigkeit $\Rightarrow$ $f(z) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n)}_{\leq c}}_{\leq c} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{f(b_n)}_{\geq c}}_{\geq c}$. $\quad \Rightarrow f(z) \geq c$ und $f(z) \leq c \Rightarrow f(z) = c$

$\square$