<u>Clicker-Frage:</u> Sei $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(0)=1$, $f(1)=0$.

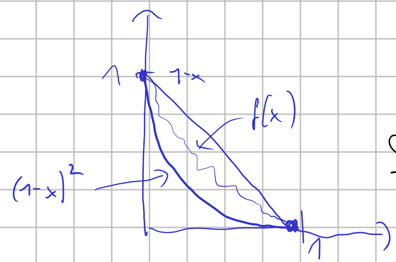
- Wenn f stetig ist, dann gibt es ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = \frac{1}{2}$.

Richtig! Zwischenwertsatz.

- Wenn $(1-x)^2 \leq f(x) \leq 1-x$ $\forall x \in [0,1]$, dann ist f in 0 und 1 stetig.

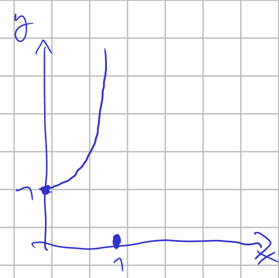
Richtig! Folgenstetigkeit: wenn $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, dann gilt $\lim_{n\to\infty}(1-a_n)^2 = \lim_{n\to\infty}(1-a_n) = 0$

Sandwichlemma $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$. Analog: Stetigkeit in 0.



- Wenn f in allen Punkten $x_0 \in [0,1)$ stetig ist, dann ist f beschränkt.

Falsch! Gegenbeispiel: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & x \in [0,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$



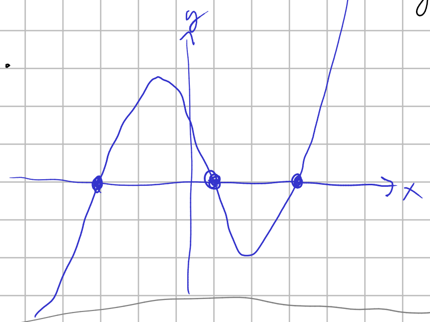
- Wenn f unbeschränkt ist, dann ist f in zumindest einem Punkt $x_0 \in [0,1]$ unstetig.

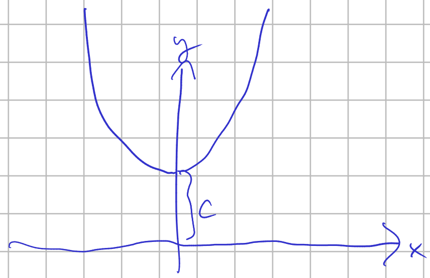
Richtig! $\to$ Thema heute. (Min-Max-Satz)

<u>Bemerkung:</u> Zwischenwertsatz kann umformuliert werden zu:

Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Funktion ist ein Intervall. [Wenn $f(a) \leq c \leq f(b) \Rightarrow \exists z$ so dass $f(z) = c$]

Korollar 3.3.2: Sei $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit $a_n \neq 0$ und n ungerade. Dann hat P eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.





Bemerkung 3.3.3: Für $c > 0$ hat $Q(x) = x^2 + c$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Bew. von Kor. 3.3.2: O.B.d.A $a_n = 1$.

Schreibe $P(x) = x^n \underbrace{\left(1 + a_{n-1} x^{-1} + a_{n-2} x^{-2} + \dots + a_0 x^{-n}\right)}_{Q(x)}$

für $x \neq 0$.

Es gilt: $Q(\pm m) = 1 + a_{n-1} \underbrace{\frac{1}{\pm m}}_{\to 0} + a_{n-2} \underbrace{\frac{1}{(\pm m)^2}}_{\to 0} + \dots + a_0 \underbrace{\frac{1}{(\pm m)^n}}_{\to 0} \quad (m \to \infty)$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}^*: \; Q(N) > 0, \; Q(-N) > 0.$

$\Rightarrow P(\pm N)$ hat dasselbe Vorzeichen wie $(\pm N)^n$. $\Rightarrow P(N) > 0$.

n ungerade! $\Rightarrow P(-N) < 0$.

Zwischenwertsatz auf $P: [-N, N] \to \mathbb{R}$ angewendet $\Rightarrow \exists x \in [-N, N]: P(x) = 0$ $\square$

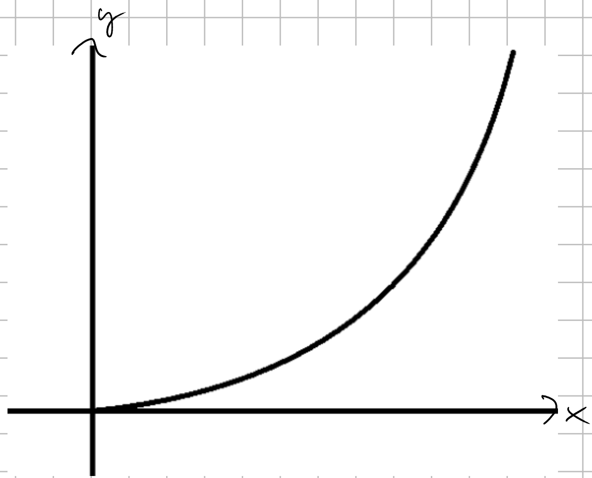
3.4 Der Min-Max-Satz

Beispiel 3.4.1.

ein abgeschlossenes unbeschränktes Intervall.

(1) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$

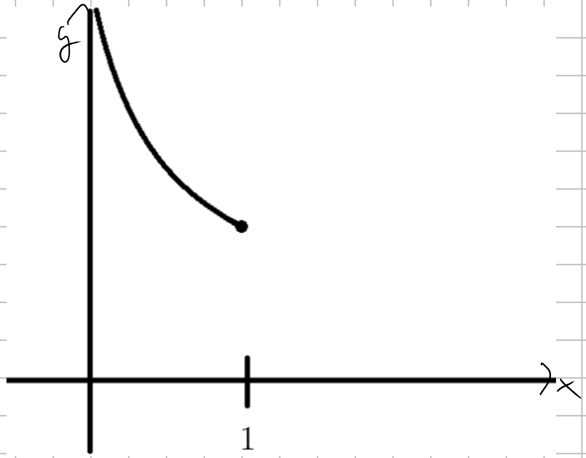
ist stetig und unbeschränkt.



(2) $f: (0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

beschränktes Intervall halboffenes

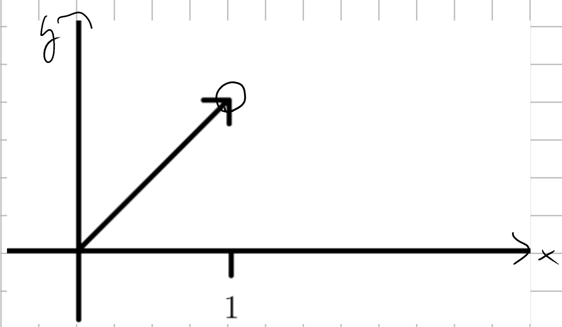
ist auch stetig und unbeschränkt



beschränktes, halboffenes Intervall.

(3) $f: [0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$

ist stetig, beschränkt, aber nimmt kein Maximum an, d.h. es existiert kein $v \in [0,1)$ mit $f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in [0,1)$



Def. 3.4.2: Ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist kompakt, falls es von der Form $I = [a,b] \quad (a \leq b)$ ist.

- beschränkt und
- abgeschlossen

Lemma 3.4.4 (ergänzt): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall. Dann gilt:

I kompakt $\iff$ jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in I

Satz 3.4.5 (Min-Max-Satz): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Minimum und Maximum an, d.h. $\exists\, u, v \in I$ mit

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v)$$

$\forall x \in I$.

Bew: (anders als im Skript) Wir beweisen: Beschränktheit nach oben und Existenz des Maximums.

(1) Wenn f nicht nach oben beschränkt ist, dann gibt es $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ein $a_n \in I$ mit $f(a_n) \geq n$. Da I kompakt, existiert nach Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(a_{e(n)})_{n \geq 1}$.
Dann ist $r := \lim_{n\to\infty} a_{e(n)}$ auch in I enthalten.

$I = [a,b]$. Da $a \leq a_{e(n)} \leq b$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ folgt $a \leq \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{e(n)}}_{r} \leq b \Rightarrow r \in I$.

Dann ist aufgrund der Stetigkeit von f in r: $\underset{\in\mathbb{R}}{f(r)} = \lim_{n\to\infty} f(a_{e(n)})$
Aber: $f(a_{e(n)}) \geq e(n) \geq n$. D.h. $f(a_{e(n)})$ kann nicht gegen $f(r)$ konvergieren ↯

(2) f beschränkt nach oben $\Rightarrow S := \sup\{f(x) \mid x \in I\} \in \mathbb{R}$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ist $S - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von $f(I)$.
D.h. $\exists\, b_n \in I$ mit $S - \frac{1}{n} \leq f(b_n) \leq S$. Wir nehmen nun eine konvergente Teilfolge $(b_{e(n)})_{n\geq 1}$. Sei $v = \lim_{n\to\infty} b_{e(n)} \in I$ Kompaktheit von I.

Gelbe Ungleichung $\Rightarrow$ $\overset{\to S}{S - \frac{1}{e(n)}} \leq f(b_{e(n)}) \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Grenzwert, Stetigkeit von f $\Rightarrow$ $f(v) = \lim_{n\to\infty} f(b_{e(n)}) = S$

D.h. $f(v) = \sup \{ f(x) \mid x \in I \}$. D.h. f nimmt in v ein Maximum an. $\square$

3.5 Der Satz über die Umkehrabbildung

Wenn D_1, D_2 zwei Mengen sind und $f: D_1 \to D_2$, $g: D_2 \to \mathbb{R}$, dann können wir die Komposition (oder Verkettung, Verknüpfung, Hintereinanderschaltung)

$$g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$$

betrachten, welche durch $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ für $x \in D_1$ definiert ist.

Satz 3.5.1: Seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$. Ist $f: D_1 \to D_2$ stetig in $x_0 \in D_1$ und $g: D_2 \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$, dann ist $g\circ f$ stetig in x_0.

Bew: Über Folgenstetigkeit (Satz 3.2.4):

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in D_1 mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$.

Stetigkeit von f in x_0 $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

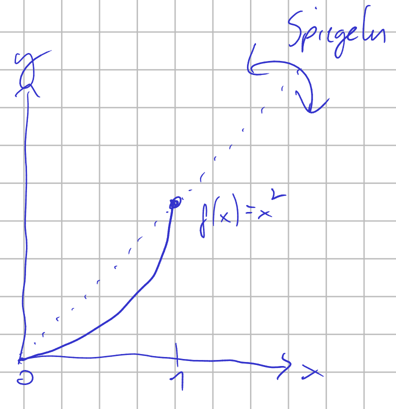
Stetigkeit von g in $f(x_0)$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0)$ $\square$

Korollar 3.5.2: Sind in Satz 3.5.1 f auf D_1 und g auf D_2 stetig, dann ist $g\circ f$ auf D_1 stetig.

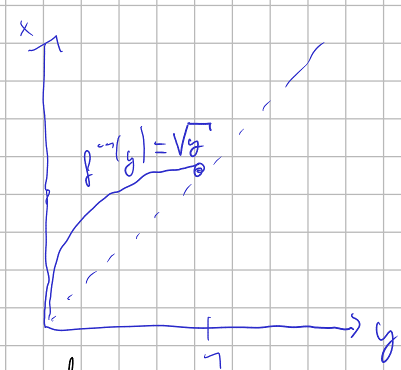
Anwendung: Für $f: D \to \mathbb{R}$ ist $|f|: D \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$|f|(x) = |f(x)| \text{ für } x \in D.$$
Wenn f stetig ist, dann ist $|f|$ stetig. Denn: $|f| = |\cdot| \circ f$ (stetig auf $\mathbb{R}$)
(vgl. Lemma 3.4.3 im Skript)

Nun zur **Umkehrabbildung**: Ist $f: D_1 \to D_2$ bijektiv, dann existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}: D_2 \to D_1$ welche charakterisiert ist durch:
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D_1 \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} \circ f = id_{D_1}$$
$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in D_2 \quad \Leftrightarrow \quad f \circ f^{-1} = id_{D_2}$$

Satz 3.5.3: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist $J := f(I)$ ein Intervall und $f^{-1}: J \to I$ ist streng monoton und stetig.



Bew: (1) J ist Intervall:
Wenn $f(a), f(b) \in J$, dann ist aufgrund des Zwischenwertsatzes jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ auch in J.
$\Rightarrow$ J ist ein Intervall (Übung)



(2) Bijektivität: strenge Monotonie von f impliziert, dass f injektiv ist.
$$\left[\begin{array}{lll} \text{entweder} & x < y \Rightarrow f(x) < f(y) & \leftarrow \text{str. mon. steigend} \\ \text{oder} & x < y \Rightarrow f(x) > f(y) & \leftarrow \text{str. mon. fallend} \end{array}\right]$$

Da $J = f(I)$, ist $f: I \to J$ bijektiv

D.h. $f^{-1}: J \to I$ existiert.

(3) strenge Monotonie ab hier: oBdA sei f streng monoton steigend.

d.h: $\forall x,y \in I: \quad x < y \overset{\Leftarrow}{\Longleftrightarrow} f(x) < f(y)$

denn: wenn $x \geq y$ dann folgt aus der Monotonie $f(x) \geq f(y)$.

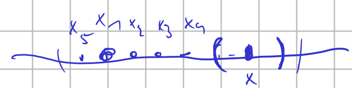
Wenn nun $v, w \in J$: dann gilt $\underset{f(x)}{\underset{\parallel}{v}} < \underset{f(y)}{\underset{\parallel}{w}} \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(v)}_{=x} < \underbrace{f^{-1}(w)}_{=y}$.

(4) Stetigkeit von f^{-1}: Über Folgenstetigkeit. Sei $(v_n)_{n\geq 1}$ in $\underset{f(I)}{\underset{\parallel}{J}}$.

Dann gibt es $x_n \in I$ mit $f(x_n) = v_n \Leftrightarrow f^{-1}(v_n) = x_n$.

Nehmen wir an, $v_n \xrightarrow{n\to\infty} v \in J$. Für die Stetigkeit von f^{-1} in v ist zu zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \underset{x_n}{\underset{\parallel}{f^{-1}(v_n)}} \overset{?}{=} f^{-1}(v) =: x \in I$.

Wenn das nicht gilt, dann gibt es $\varepsilon > 0$



so dass unendlich oft $x_n \notin (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Wenn unendlich oft $x_n \geq x+\varepsilon$, dann ist $x+\varepsilon \in I$, da I ein Intervall ist.

und unendlich oft gilt $v_n = f(x_n) \geq f(x+\varepsilon) > f(x) = v$.

↯ zu $\lim_{n\to\infty} v_n = v$.

Wenn unendlich oft $x_n \leq x-\varepsilon$, dann ist $x-\varepsilon \in I$, da I ein Intervall ist.

und unendlich oft gilt $v_n = f(x_n) \leq f(x-\varepsilon) < f(x) = v$.

↯ zu $\lim_{n\to\infty} v_n = v$.

In beiden Fällen Widerspruch $\Rightarrow$ es muss $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(v_n) = f^{-1}(v)$ gelten, was die Stetigkeit von f^{-1} in v zeigt. $\square$