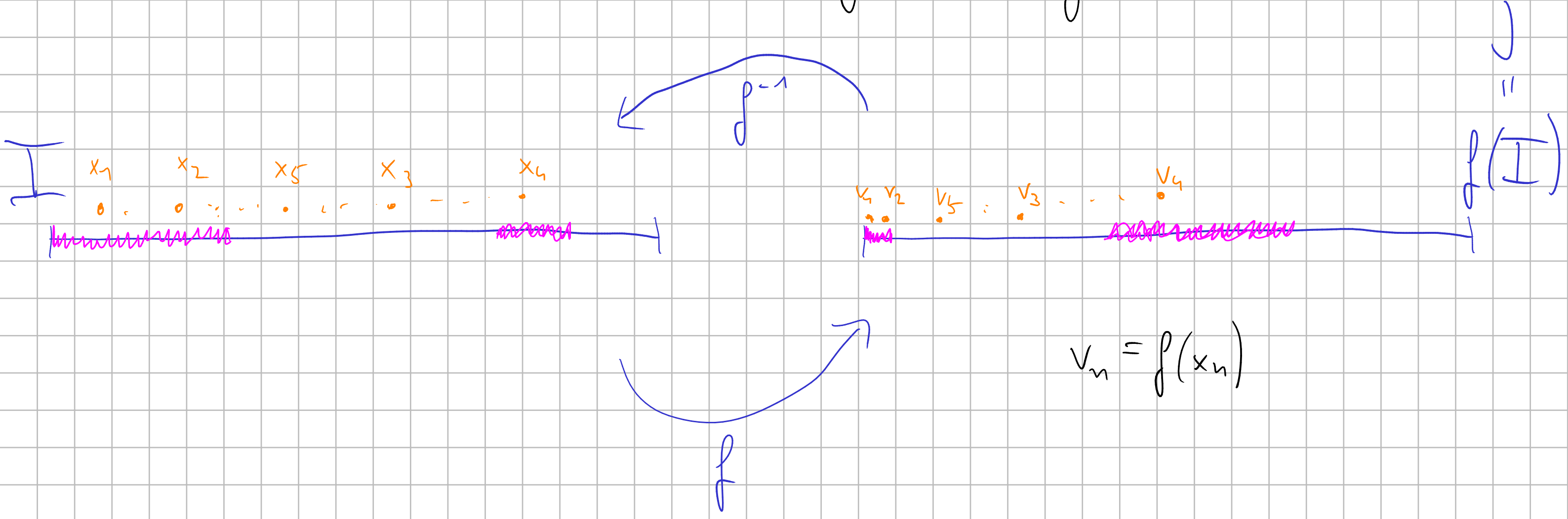
Wiederholung:

Satz über die Umkehrabbildung:

Ist I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, dann ist $f^{-1}: f(I) \to I$ auch stetig und streng monoton.



x_n konvergiert gegen x $\iff$ v_n konvergiert gegen $v = f(x)$

Beispiel 3.5.4: Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Dann ist

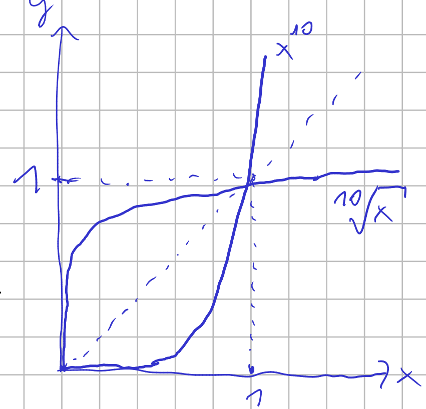
$$[0,\infty) \to [0,\infty)$$
$$x \mapsto x^n$$

stetig, streng monoton wachsend, und surjektiv.

Satz über Umkehrabb. $\Rightarrow$ Die inverse Funktion

$$[0,\infty) \to [0,\infty)$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

stetig, streng monoton wachsend, und surjektiv.



3.6 Die reelle Exponentialfunktion

Erinnerung:
- Definition: $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für $z \in \mathbb{C}$.
- Additionstheorem: $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$
- Weitere Darstellung: $\exp(z) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$

Satz 3.6.1 $\exp: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend und surjektiv.

Für $\overset{x > 0}{x \geq 0}$ ist $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots \overset{> 1}{\geq 1}$

Aussendem: $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \underbrace{\exp(x)}_{\geq 1} \exp(-x)$

$\Rightarrow \exp(-x) > 0$. D.h.: $\exp(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$

Für $y < z$ gilt: $\exp(z) = \exp(y + (z-y)) = \underbrace{\exp(y)}_{>0} \cdot \underbrace{\exp(\overbrace{z-y}^{>0})}_{>1}$

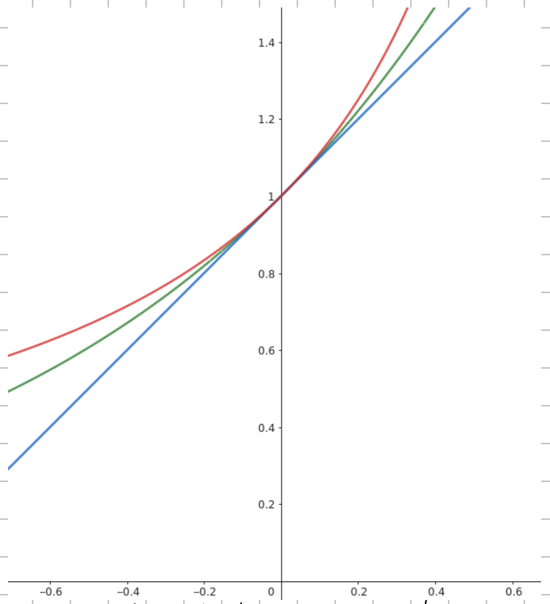
$> \exp(y)$

$\Rightarrow$ exp ist streng monoton wachsend

Fakt: $\exp(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Bew: Für $n > |x|$ ist $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bernoulli-Ungl.}}}{\geq} 1 + n \cdot \left(\frac{x}{n}\right) = 1 + x$

$\Rightarrow \exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$ $\square_{\text{Fakt.}}$



Stetigkeit in 0: Betrachte $x \in (-1,1)$.

Dann gilt $\exp(x) \geq 1+x$ und

$$\exp(-x) \geq 1-x$$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

D.h.: $\underbrace{1+x}_{\text{in } 0:\ \underline{1}} \leq \exp(x) \leq \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{in } 0:\ \underline{1}} \quad \forall x \in (-1,1)$.

$1+x$, $\frac{1}{1-x}$ stetig in 0. Daher folgt aus dem Sandwichlemma über die Folgenstetigkeit die Stetigkeit von exp in 0. (vgl. Lösung der Clicker-Frage vom Montag)

Stetigkeit in x_0: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exp(x) = \exp(x - x_0)\exp(x_0) \qquad (*)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Stetigkeit von exp in 0 gibt es $\delta > 0$, so dass $\forall y \in (-\delta, \delta)$ gilt, dass $|\exp(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{\exp(x_0)}$

Aus (*) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$, dass

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| = |\exp(x-x_0)\exp(x_0) - \exp(x_0)| = \cancel{\exp(x_0)} \underbrace{\left|\exp(\overbrace{\underbrace{x-x_0}_{y}}^{|\cdot| < \delta}) - 1\right|}_{< \frac{\varepsilon}{\cancel{\exp(x_0)}}} < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ exp in x_0 stetig.

Surjektivität: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\exp(n) = \exp(1 + \ldots + 1) = e^n \overset{\text{da } e \geq 2.}{\geq} \underbrace{2^n}_{\to \infty}$

$\Rightarrow \exp(-n) \leq \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}$. Zwischenwertsatz: $\left[\frac{1}{2^n}, 2^n\right] \subset \exp(\mathbb{R})$

$(0,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [\frac{1}{2^n}, 2^n] \subset \exp(\mathbb{R}) \Rightarrow \exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ $\square$

<u>Def:</u> Die Umkehrabbildung von $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist der <u>natürliche Logarithmus</u>

auch: $\log: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

<u>Korollar 3.6.5:</u> $\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig, und bijektiv.

Für $a,b \in (0,\infty)$ gilt: $\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b$

<u>Bew:</u> Der Satz über die Umkehrabbildung gibt uns alles bis auf die Funktionalgleichung.

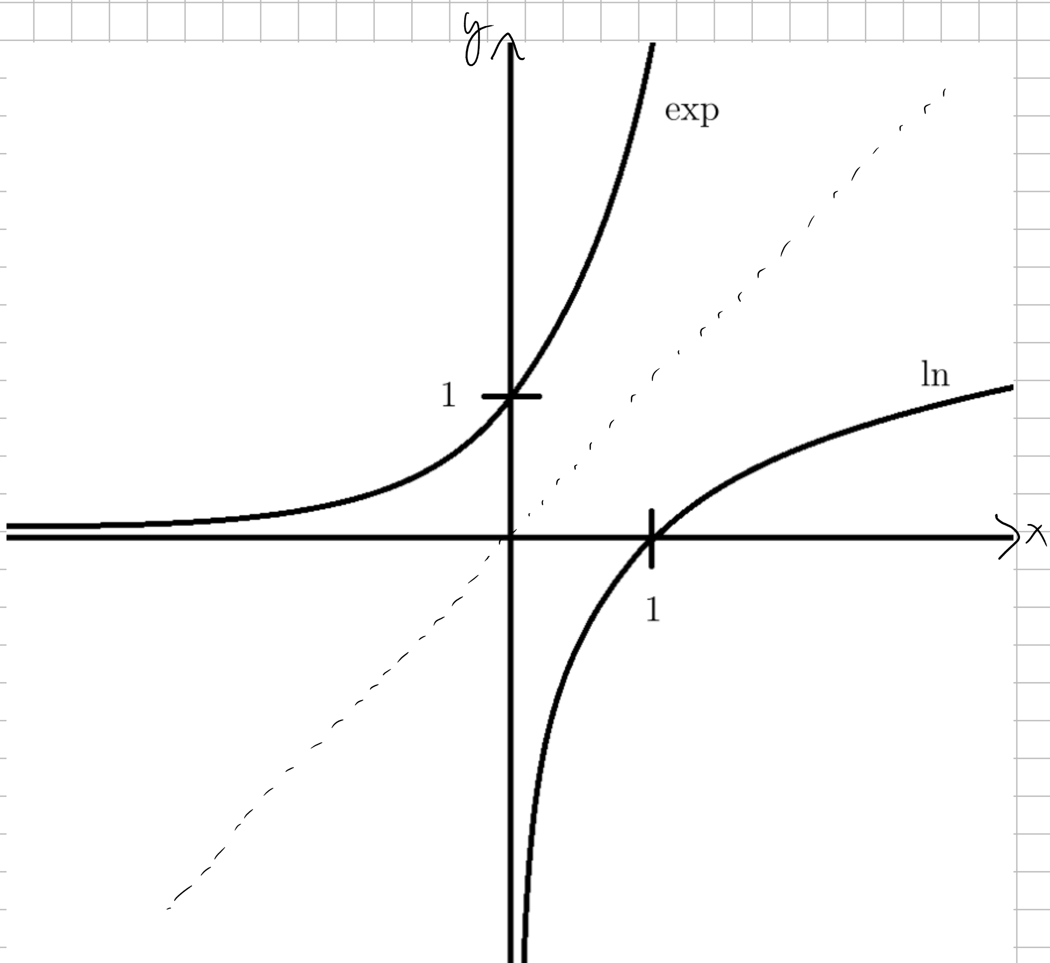
Für $a,b>0$: $\exp(\ln a + \ln b) = \overbrace{\exp(\ln a)}^{a} \cdot \overbrace{\exp(\ln b)}^{b} = a\cdot b$

Wende ln auf die letzte Gleichung an

$\Rightarrow \ln a + \ln b$

$= \ln(\exp(\ln a + \ln b))$

$= \ln(a\cdot b)$ $\square$



Allgemeine Potenzen:

Für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir:

$$x^a := \text{"}\left(e^{\ln(x)}\right)^a = e^{\ln(x)\cdot a}\text{"} = \exp(a \cdot \ln(x))$$

Insbesondere: $x^0 = \exp(0 \cdot \ln(x)) = \exp(0) = 1 \quad \forall x \in (0,\infty)$

Korollar 3.6.6:

(1) Für $a > 0$ ist

$$\begin{aligned} (0,\infty) &\to (0,\infty) \\ x &\mapsto x^a \end{aligned}$$

stetig, streng mon. wachsend, bijektiv

(2) Für $a < 0$ ist

$$\begin{aligned} (0,\infty) &\to (0,\infty) \\ x &\mapsto x^a \end{aligned}$$

stetig, streng mon. fallend, bijektiv.

(3) $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$ $\qquad (\forall x > 0,\ a, b \in \mathbb{R})$

(4) $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$

(5) $(x^a)^b = x^{ab}$

Bew:

str. mon. wachsend / str. mon. wachsend — str. mon. fallend / str. mon. wachsend — str. mon. wachsend / str. mon. wachsend

$$(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow (0,\infty)$$

$$x \overset{\ln}{\longmapsto} \ln(x) \overset{a\cdot}{\longmapsto} a \cdot \ln(x) \overset{\exp}{\longmapsto} \exp(a \cdot \ln(x)) = x^a$$

Da die Komposition von stetigen Abb. stetig ist, folgt, dass

$x \mapsto x^a$ stetig auf $(0,\infty)$ ist.

Für $a \neq 0$ sind alle Pfeile oben bijektiv $\Rightarrow$ $x \mapsto x^a$ ist bijektiv.

(1) $a > 0$: alle Pfeile sind str. mon. wachsend $\Rightarrow$ $x \mapsto x^a$ str. mon. wachsend.

(2) $a < 0$: $2\times$ str. mon. wachsend, $1\times$ str. mon. fallend $\Rightarrow$ $x \mapsto x^a$ str. mon fallend.

(3) $\ln(x^a) \overset{\text{Def.}}{=} \cancel{\ln}(\cancel{\exp}(a \cdot \ln(x))) \overset{\exp^{-1} = \ln}{=} a \ln(x)$

(5) Übung

(4) $x^{a+b} \overset{\text{Def}}{=} \exp((a+b)\ln(x)) = \exp(a \ln x + b \ln x)$

$\overset{\text{Add. th.}}{=} \underbrace{\exp(a \ln x)}_{x^a} \cdot \underbrace{\exp(b \ln(x))}_{x^b} \overset{\text{Def}}{=} x^a \cdot x^b$ $\square$

3.7 Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei D eine Menge. Eine (reellwertige) Funktionenfolge ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}^D$$
$$n \mapsto f_n$$

d.h. jedes f_n ist eine Funktion $D \to \mathbb{R}$

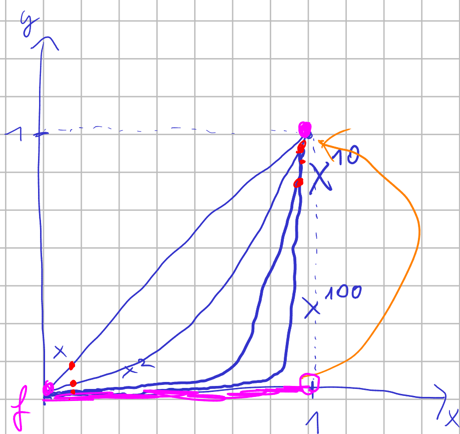
Wir schreiben für eine Funktionenfolge einfach $(f_n)_{n \geq 0}$

Für jedes $x \in D$ erhalten wir eine Folge $(f_n(x))_{n \geq 0}$ reeller Zahlen.

Def 3.7.1: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert punktweise gegen $f: D \to \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Beispiel 3.7.2: $D = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$

Konvergiert $(f_n)_{n\geq 0}$ punktweise?



Für $0 \leq x < 1$: $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Für $x = 1$: $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$

D.h. $(f_n)_{n\geq 0}$ konvergiert punktweise gegen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Bemerke: f ist nicht überall in $[0,1]$ stetig! (nämlich in 1 unstetig).

Def. 3.7.3: Die Folge der Funktionen $f_n: D \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmässig (in D) gegen $f: D \to \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

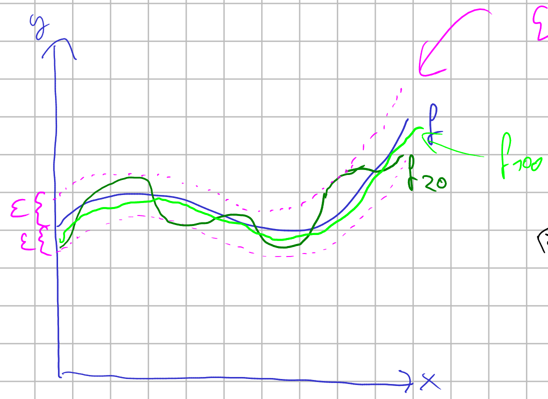
$N(\varepsilon)$ funktioniert $\forall x \in D$!

[Vgl. mit punktweiser Konvergenz:

$$\forall x \in D: \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$N(\varepsilon, x)$ hängt möglicherweise von x ab!]

Veranschaulichung der gleichmässigen Konvergenz:



Gleichmässige Konvergenz

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N$

"f_n liegt komplett im ε-Schlauch um f"

Im Beispiel 3.7.2: $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

ε-Schlauch.

⚡ für jedes $n \in \mathbb{N}$ verlässt f_n nahe bei 1 den ε-Schlauch um f.

$\Rightarrow$ f_n konvergiert hier nicht gleichmässig gegen f.