Wiederholung: $f_n: D \to \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$

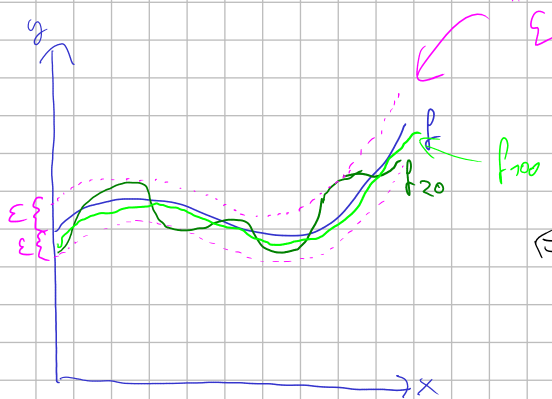
- punktweise Konvergenz:

  $\forall x \in D: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

- gleichmässige Konvergenz:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \ \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

"ε-Schlauch" um f.



Gleichmässige Konvergenz

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$

"f_n liegt komplett im ε-Schlauch um f"

Beispiel: $f_n: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$

konvergiert punktweise gegen eine unstetige Funktion $f: [0,1] \to \mathbb{R}$

Diese Konvergenz ist nicht gleichmässig

ε-Schlauch.

↯ für jedes $n \in \mathbb{N}$ verlässt f_n nahe bei 1 den ε-Schlauch um f.

Satz 3.7.4: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die (in D) gleichmässig gegen eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn f_n für alle $n \geq 1$ stetig ist in einem Punkt $x_0 \in D$, dann ist f in x_0 stetig.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Da $f_n \to f$ gleichmässig konvergiert, gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$.

Da f_N stetig in x_0 ist, gibt es $\delta > 0$, so dass $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, gilt, dass $|f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \varepsilon$.

Dann gilt $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

nahe bei f nahe bei f

$$|f(x) - f(x_0)| = |\underbrace{(f(x) - f_N(x))}_{\text{klein wegen glm. Konv.}} + \underbrace{(f_N(x) - f_N(x_0))}_{\text{klein wegen Stetigkeit}} + \underbrace{(f_N(x_0) - f(x_0))}_{\text{klein wegen glm. Konv.}}|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{<\varepsilon} < 3\varepsilon$$

$\square$

Def. 3.7.5: Eine Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ ist **gleichmässig konvergent** wenn für alle $x \in D$ der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$$

existiert und die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ gleichmässig gegen f konvergiert.

Korollar 3.7.6: Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann gleichmässig konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq N \ \forall x \in D : \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

"Cauchy-Kriterium für gleichmässige Konvergenz"

Bew: siehe Skript

Korollar 3.7.7: Wenn $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine gleichmässig konvergente Folge stetiger Funktionen ist, dann ist die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig (in D).

Bew: Satz 3.7.4. $\square$

Reihen von Funktionen

Sei $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Dann können wir die Reihe $\sum_{k=0} f_k$ betrachten.

Def 3.7.8: Die Reihe $\sum_{k=0} f_k$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert punktweise (resp. gleichmässig) in D wenn die Funktionenfolge der Partialsummen $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ punktweise (resp. gleichmässig) konvergiert.

$c_n \in [0, \infty)$

Satz 3.7.9: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen. Wir nehmen an, dass $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in D$ und dass die Reihe $\sum_{k=0} c_k$ konvergiert (also $\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$).

Dann konvergiert $\sum_{k=0} f_k$ gleichmässig (in D).

Wenn alle f_n in D stetig sind, dann ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ eine in D stetige Funktion.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es (Cauchy-Kriterium für Reihen) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m \geq n \geq N$: $\sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon$

Dann gilt $\forall m \geq n \geq N$ und alle $x \in D$:

$$\left| S_m(x) - S_n(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{m} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon$$

Cauchy-Krit. für glm. Konvergenz (Satz 3.7.6) $\Rightarrow \sum_{k \geq 0} f_k$ konv. gleichmässig $\square$

Anwendung: Potenzreihen

Erinnerung: Ist $(c_k)_{k \geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, dann ist

$$\sum_{k \geq 0} c_k x^k$$

eine Potenzreihe (in der reellen Variablen x).

Def 3.7.10: Die Potenzreihe $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ hat positiven Konvergenzradius, wenn $R := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$

Der Konvergenzradius ist dann definiert als:

$$\rho = \begin{cases} \infty & \text{wenn } R = 0 \\ \frac{1}{R} & \text{wenn } R > 0 \end{cases}$$

Korollar 2.7.21 $\Rightarrow$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \rho$ konvergiert $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$ absolut.

Wir erhalten also eine Funktion $f: (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$

<u>Satz 3.7.11</u>: Sei $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt für alle $0 \leq r < \rho$ dass die Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ in $[-r, r]$ gleichmässig konvergiert.

Insbesondere ist $f: (-\rho, \rho) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ stetig.

<u>Bew.</u>: Sei $f_k(x) = c_k x^k$ $(k \geq 0)$. ... diese sind stetig (in $\mathbb{R}$)

Für $|x| \leq r$ gilt: $|f_k(x)| = |c_k| \, |x|^k \leq |c_k| \, r^k$

$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \, r^k$ konvergiert, da die Reihe $\sum_{k\geq 0} c_k r^k$ wegen $r < \rho$ absolut konvergiert

Satz 3.7.9 $\Rightarrow$ $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ konvergiert gleichmässig in $[-r, r]$ und $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist stetig in $[-r, r]$. Das heisst, die Funktion f ist stetig in $[-r, r]$ für alle $0 \leq r < \rho$ $\Rightarrow$ f ist stetig in $(-\rho, \rho)$ $\square$

<u>Bemerkung</u>: (1) Die Betrachtung als Potenzreihe liefert uns nun einen zweiten Beweis der Stetigkeit der Exponentialfunktion.

(2) Im Allgemeinen konvergiert eine Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ mit

Konvergenzradius $\varrho > 0$ <u>nicht</u> gleichmässig in $(-\varrho, \varrho)$!

<u>Beispiel</u>: Die Exponentialreihe konvergiert nicht gleichmässig in $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

<u>Clicker-Frage</u>: $A := e^i = \exp(i) = 1 + i + \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} + \dots$

$\overset{\shortparallel}{\cos(1) + i\sin(1)}$ ... vgl. folgendes Thema

Direkt:

$$|A| = \sqrt{A \cdot \overline{A}} = \sqrt{e^i \cdot \underbrace{\overline{e^i}}_{e^{-i}}} = \sqrt{e^i \cdot e^{-i}} = \sqrt{e^{i+(-i)}} = \sqrt{e^0} = 1.$$

$$\left[\ \overline{e^i} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}} = \lim_{n \to \infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{i^k}{k!}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{i}^k}{k!} = \dots = e^{-i}\ \right]$$

Stetigkeit von kompl. Konj. — Additivität von kompl. Konj.

3.8 Trigonometrische Funktionen

<u>Def</u>: Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir:

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

<u>Bemerkung</u>: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\cos(x) = \mathrm{Re}\big(\exp(ix)\big)$

$\sin(x) = \mathrm{Im}\big(\exp(ix)\big)$

Quotientenkriterium $\Rightarrow$ beide Reihen konvergieren $\forall z \in \mathbb{C}$ absolut.
(vgl. Beispiel 2.7.18 zur Exponentialfunktion)
Der Konvergenzradius ist also in beiden Fällen ∞.
Satz 3.7.11 impliziert:

Satz 3.8.1: $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Weitere Eigenschaften:

Satz 3.8.2: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$

(2) $\cos(-z) = \cos(z)$ $\qquad$ $\sin(-z) = -\sin(z)$

"cos ist eine gerade Funktion" $\qquad$ "sin ist eine ungerade Funktion"

(3) $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\qquad$ $\sin(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

(4) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$

(5) $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$

Bew: (1)
$$\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$(i^2=-1)$ $$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \cos(z) + i \sin(z).$$

(2) ✓

(3) $$e^{iz} \overset{(1)}{=} \cos(z) + i\sin(z)$$

$$e^{-iz} \overset{(1)}{=} \cos(-z) + i\sin(-z) \overset{(2)}{=} \cos(z) - i\sin(z)$$

$+ \Rightarrow 2\cos(z) = e^{iz} + e^{-iz}$

$- \Rightarrow 2i\sin(z) = e^{iz} - e^{-iz}$

(4) $$e^{i(w+z)} = e^{iw} e^{iz} \overset{(1)}{=} (\cos(w) + i\sin(w))(\cos(z) + i\sin(z))$$

$$= \cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z) + i(\cos(z)\sin(w) + \cos(w)\sin(z))$$

$$e^{-i(w+z)} = \cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z) - i(\cos(z)\sin(w) + \cos(w)\sin(z))$$

Wie oben: $+$: $\underbrace{e^{i(w+z)} + e^{-i(w+z)}}_{2\cdot\cos(w+z)} = 2(\cos(w)\cos(z) - \sin(w)\sin(z))$

$-$ $\underbrace{e^{i(w+z)} - e^{-i(w+z)}}_{2i\sin(w+z)} = 2i(\cos(z)\sin(w) + \cos(w)\sin(z))$

(5) Setze in (4) $w=-z \Rightarrow 1 = \cos(0) = \cos(z \underbrace{-z}_{w})$

$$= \cos(z)\underbrace{\cos(-z)}_{\cos(z)} - \sin(z)\underbrace{\sin(-z)}_{-\sin(z)} = \cos(z)^2 + \sin(z)^2$$

□

<u>Beispiel / Clicker</u>: $\cos(i) = \frac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} > \frac{e}{2} > 1.$